Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Philosophie
der Philosophischen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Jochim Lichtenberger
aus Ottweiler

Saarbrücken 1975

Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen

Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Philosophie
der Philosophischen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Jochim Lichtenberger
aus Ottweiler

Saarbrücken 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Der Dekan:	**Prof. Dr. F. Hiller**
Berichterstatter:	**Prof. Dr. W.H. Tack**
	Prof. Dr. P. Orlik
Tag der letzten Prüfung:	**28. Mai 1975**

INHALT

		Seite
Kapitel 1	**Wissenschaftstheoretische und begriffliche Grundlagen der Spieltheorie**	
§ 1	Einleitung	1
§ 2	Zur Entwicklung der Spieltheorie	2
§ 3	Der spieltheoretische Konfliktbegriff	3
§ 4	Zwei Arten von Modellen in der Psychologie	4
§ 5	Konstitutive und regulative Regeln	13
§ 6	Spiele in Normalform	16
§ 7	Grenzen des spieltheoretischen Ansatzes	18
Kapitel 2	**Die mathematische Theorie der Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen**	
§ 8	Grundlegende Definitionen	19
§ 9	Die charakteristische Funktion und die Normalform	20
§ 10	Zwei Interpretationen von charakteristischer Funktion und Gewinn	23
§ 11	Zwei Ansätze zur Nutzentheorie	26
§ 12	Lösungsmodelle und Verhandlungsschemata	30
§ 13	Äquivalenztransformationen	32
§ 14	Imputationen und der Kern	34
§ 15	Der Bargaining Set	44
§ 16	Gleichverteilung und Nucleolus	48
§ 17	Vergleich zwischen Bargaining Set, Nucleolus und Gleichaufteilung des Restes	56
§ 18	Der Gleichaufteilungskern	58
§ 19	Die Implikationsstruktur der Theorien	59
§ 20	Weitere Lösungstheorien	60

Kapitel 3	Experimentelle Überprüfung spieltheoretischer Modelle	
§ 21	Normative und deskriptive Auffassung spieltheoretischer Modelle	62
§ 22	Drei-Personen-Spiele in Form der charakteristischen Funktion	63
§ 23	Drei-Personen-Spiele in Normalform	80
§ 24	Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse	90
§ 25	Mögliche Weiterführungen von Theorie und Experimenten	91
Literatur		93
Anhang A1	Beweise	97
Anhang A2	Einige Ergebnisse der Theorie der n-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen für n ≤ 5	131

KAPITEL 1

Wissenschaftstheoretische und begriffliche Grundlagen der Spieltheorie

§ 1 Einleitung

Konflikte zwischen einzelnen Menschen und/oder sozialen Gruppen begegnen uns im Alltag in unterschiedlichen Formen und auf verschiedenen Ebenen, angefangen von harmlosen Meinungsverschiedenheiten über Generationskonflikte oder Konflikte in der Arbeitswelt bis hin zu Machtkonflikten zwischen Grossmächten, die das Leben von Millionen Menschen bedrohen.

Nun gibt es aber nicht nur viele Arten von Konflikten, sondern auch viele verschiedene wissenschaftliche Ansätze zu ihrer Erforschung: politologische, ökonomische, sozialpsychologische, psychoanalytische und viele andere mehr. Unabhängig von der konkreten Erscheinungsform eines Konflikts ergibt sich jedoch bei fast allen Konflikten eine Reihe gemeinsamer Probleme. Ausgehend von der abstrakten Beschreibung einer Konfliktsituation (Zahl der beteiligten Personen oder Gruppen, Handlungsmöglichkeiten, Ziele und Interessen der Beteiligten usw.) lassen sich Fragen erörtern, die mögliche oder wahrscheinliche Verlaufsformen eines Konflikts betreffen. So kann man etwa fragen, ob Hoffnung auf eine gewaltlose Einigung besteht, die alle Beteiligten zufriedenstellt. Man kann Regeln für eine Einigung untersuchen, kann analysieren, ob Kooperation für alle Beteiligten vorteilhaft ist und ob mögliche Verhandlungen, falls sie dem Prinzip des freien Wettbewerbs genügen, notwendig zu einer ganz bestimmten Einigung führen. Dies sind nur einige wenige Beispiele analysierbarer Problembereiche.

Mit solchen uund ähnlichen Fragestellungen beschäftigt sich die Spieltheorie. Da dabei von der konkreten Erscheinungsform eines Konflikts abstrahiert wird und Aussagen über grosse Klassen von Konflikten intendiert werden, bleibt sie notwendigerweise abstrakt. Wir wollen im ersten Kapitel die Grundbegriffe der Spieltheorie vorstellen und anhand dieser Begriffsbildung einige zugrundeliegende wissenschaftstheoretische Probleme er-

örtern. Dies begründet zusammen mit der spezifisch psychologischen Sichtweise die teilweise etwas unkonventionelle Form, in der im zweiten Kapitel die mathematische Theorie der Drei-Personen-Spiele (mit Seitenzahlungen) ausgearbeitet wird. Das dritte Kapitel schliesslich dient der Darstellung von Experimenten, an denen die Fruchtbarkeit des gewählten begrifflichen und theoretischen Ansatzes hinsichtlich Erklärung, Verständnis und Prognose von Verhalten in Konfliktsituationen geprüft wird.

§ 2 Zur Entwicklung der Spieltheorie

Es wäre möglich, die mathematische Spieltheorie in Form eines Kalküls darzustellen. Man könnte Axiome und Deduktionsregeln angeben und unter Anwendung dieser Regeln aus den Axiomen mathematische Sätze ableiten, wie es auch bei vielen anderen mathematischen Theorien geschieht. Inhaltliche oder wissenschaftstheoretische Fragestellungen blieben dieser Darstellung weitgehend äusserlich.

Es gibt allerdings unseres Wissens kein Lehrbuch, welches bei der Einführung in die Spieltheorie diese Strategie verfolgt. Das hängt wohl wesentlich mit der Struktur der Spieltheorie zusammen, die sich wiederum nur aus ihrer historischen Entwicklung verstehen lässt. Von NEUMANN und MORGENSTERN (1944) entwickelten die Spieltheorie nicht wie viele andere mathematische Theorien durch Integration mathematischer Fragestellungen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik, wie es etwa in der Topologie oder in der Funktionalanalysis geschieht, sondern durch Formalisierung von konkreten Konfliktsituationen aus verschiedenen Bereichen des Alltags, von ökonomischen oder sozialen Konflikten oder von Konflikten, wie sie in Gesellschaftsspielen auftauchen. Diese Strategie spiegelt sich deutlich in den Begriffsbildungen der Spieltheorie wieder. Es liegt daher nahe, eine spieltheoretische Untersuchung nicht mit mathematischen Problemen zu beginnen, sondern mit Überlegungen zu den inhaltlichen und wissenschaftstheoretischen Grundlagen des Gebietes, das mit Hilfe der Spieltheorie formal erfasst werden soll.

§ 3 Der spieltheoretische Konfliktbegriff

Zentral für den spieltheoretischen Ansatz ist der Begriff des Interessenkonflikts. Dabei orientieren sich die Autoren von Lehrbüchern meist an Konflikten, wie sie in Gesellschaftsspielen (wie Schach, Mühle oder Monopoly) vorkommen, oder an ökonomischen Konflikten. Wichtig ist dabei, dass vier wesentliche Merkmale von Interessenkonflikten gegeben sind:

1.) Es sind mehrere Parteien, d.h. Personen oder Gruppen von Personen, als 'Spieler' am Geschehen beteiligt. Insbesondere wird angenommen, dass die Spieler gewisse Interessen haben, die auf rationale oder planvolle Weise zu vertreten sie in der Lage sind.
Dass dieser Konzeption möglicherweise eine bestimmte wissenschaftstheoretische Sicht vom Menschen beziehungsweise eine Handlungstheorie zugrundeliegt, darauf wollen wir im nächsten Paragraphen ausführlicher eingehen.

2.) Jede Partei hat die freie Wahl, sich zwischen verschiedenen möglichen Handlungsalternativen zu entscheiden. Keine Partei weiss von vornherein, wie sich die übrigen Beteiligten entscheiden werden.

3.) Die Auswirkung einer Entscheidung trifft nicht nur den Entscheidenden selbst, sondern auch die übrigen Beteiligten; insofern interagieren die Spieler. Dies bedingt, dass keiner der Spieler seine zukünftige Lage allein bestimmen kann; sie wird immer wenigstens zum Teil auch durch die anderen Spieler mitbestimmt.

4.) Die Interessen der Spieler stehen mindestens teilweise im Gegensatz zueinander: ein n-Tupel von Entscheidungen der n Beteiligten, welches für einen der Spieler optimal ist, lässt einen andern hinter seinen optimalen Möglichkeiten zurück und umgekehrt. Dies macht das Konflikthafte an der Interaktionssituation aus.

Diese vier Bedingungen liefern eine Explikation des Begriffs 'Interessenkonflikt' und damit die Grundlage für die weitere Formalisierung.

§ 4 Zwei Arten von Modellen in der Psychologie

Die naturwissenschaftlich orientierte Psychologie ist beeinflusst durch ein Denkschema, welches dem Modell der Erkenntnisgewinnung entspricht, wie es typisch in der klassischen Physik realisiert ist: durch Herbeiführen eines Ereignisses A, durch Beobachtung der Folgen B dieses Ereignisses und durch induktive Schlüsse versucht der Wissenschaftler, Kausalzusammenhänge in Form von Allaussagen "Immer wenn A, dann B" aufzudecken, denen er dann einen hohen Bestätigungsgrad zuordnet, wenn sie sich nicht durch weitere Untersuchungen falsifizieren lassen.

Auf den Bereich tierischen und menschlichen Verhaltens angewandt, führt dieses Denkmodell zwanglos zu dem Schema von Reiz (als unabhängiger Variable, die vom Experimentator willkürlich manipuliert wird) und Reaktion (als abhängiger Variable, die beobachtet, kausal erklärt oder vorausgesagt wird). Wir wollen dieses Denkschema als "mechanistisches Paradigma" bezeichnen.

Bevor wir die Bedingungen zur Angemessenheit und Nutzbarkeit dieses Paradigmas untersuchen, wollen wir ein zweites Paradigma humanwissenschaftlicher Forschung darstellen.

Sowohl die von MILLER, GALANTER und PRIBRAM (1973) angestellten Überlegungen als auch die Arbeiten phänomenologisch orientierter Psychologen in der Nachfolge von M. WEBER, A. SCHÜTZ und G.H. MEAD basieren auf sehr viel differenzierteren Vorstellungen über die kognitiven Strukturen, die menschlichem Handeln zugrundeliegen. Aus diesen Überlegungen resultiert ein "anthropologisches Paradigma", welches von der Vorstellung ausgeht, dass Menschen sich oft zwischen verschiedenen Handlungsmöglichkeiten zu entscheiden haben. Entscheidungen werden geleitet von Plänen oder Regelsystemen, d.h. nach MILLER, GALANTER und PRIBRAM von hierarchisch geordneten Systemen von Instruktionen, die als Handlungsanweisungen zu verstehen sind

(in Analogie zum Computerprogramm). Pläne basieren auf Bildern oder Modellvorstellungen des Organismus über seine Umwelt und sich selbst.

Eine Interaktion, die sich im Rahmen dieses Begriffssystems angemessen erfassen lässt, findet im Gesellschaftsspiel statt: Das Bild der Situation besteht hier aus den Spielregeln, die das Spiel definieren und die jeder Spieler kennen und anerkennen muss. Die Spielregeln legen fest, welche Handlungsmöglichkeiten jedem Spieler im Verlauf des Spiels offenstehen und wie die möglichen Ausgänge des Spiels zu bewerten sind (Gewinn-Verlust). Im Rahmen der Spielregeln wird der Spieler mehr oder weniger ausgearbeitete Strategien entwickeln, Pläne, die ihm sagen, was er in jeder Situation zu tun hat um zum Ziel zu gelangen. Jeder einzelne Zug im Spiel wird durch den vorgefassten Plan in einen Kontext gestellt, der erst den Zugang zur Logik, zur Einsichtigkeit und zum Sinn dieses Zuges eröffnet.

Beide Paradigmen basieren auf gewissen Annahmen, die zum Teil wissenschaftstheoretische Maximen der jeweiligen Richtung (Positivismus und Rationalismus bzw. Phänomenologie, Hermeneutik und Dialektik), zum Teil aber auch unreflektierte Voraussetzungen des Modells darstellen. In der Gegenüberstellung der beiden Paradigmen wollen wir die Problematik dieser Annahmen untersuchen.

In seinem Buch "Erklären und Verstehen" legt v. WRIGHT (1971) dar, dass man ein Ereignis unter Umständen auf sehr verschiedene Weisen beschreiben kann. Betrachten wir das Ereignis E, welches sich auf die zwei folgenden Arten darstellen lässt:

B1: Person P bewegt ihren Arm
B2: Die Lagekoordinaten von P's Arm ändern sich.

Die Beschreibung B1 impliziert, dass P einer Handlungsanweisung, einer Regel oder einem Plan folgt. Das Ereignis E wird als intentionale Handlung angesehen. B1 legt die Frage nahe: Wozu bewegt P ihren Arm ? Dies ist die Frage nach dem Ziel oder der Intention der Handlung oder nach dem grösseren Handlungszusammenhang, in den die Handlung des Armhebens einzuordnen ist, nach der nächsthöheren Hierarchie von Regeln also, die einen Plan bestimmen. Wir sagen mit v. WRIGHT: Das Ereignis E ist intentional unter der Beschreibung B1. Die intentionale Beschreibung bezieht sich also

wesentlich auf den Plan, der einer Handlung zugrundeliegt.

Das anthropologische Paradigma setzt voraus, dass die zu erklärenden Ereignisse in einer intentionalen Beschreibung vorliegen. Die intentionale Beschreibung einer Menge von Ereignissen liefert ein handlungstheoretisches Aussagensystem, welches logischer Analyse zugänglich ist. Auf diese Weise lassen sich Inkonsistenzen von Handlungssystemen aufdecken. Sind die zugrundeliegenden Regeln in sich widerspruchsfrei ? Folgt unter Gültigkeit eines Regelsystems eine Handlung zwangsläufig aus andern ? Gestattet das die Situation definierende Regelsystem, ein Ziel auf verschiedenen Wegen zu erreichen ?

Die "physikalistische" Beschreibung B2 hingegen, die in der Angabe der raumzeitlichen Koordinatenveränderung besteht, legt eine andere Frage nahe, nämlich die nach den Ursachen (der Lageveränderung). Es wird gefragt nach Ereignissen A und nach Naturgesetzen der Form "Immern wenn A, dann E", die eine kausale Erklärung des Ereignisses E gestattet.

Weil das hier "mechanistisches Paradigma" genannte Denkschema zentraler Bestandteil der analytischen Wissenschaftstheorie ist, wollen wir im Zusammenhang mit den beiden Paradigmen auf einige Forderungen dieser wissenschaftstheoretischen Richtung eingehen.

Spätestens seit CARNAP stellen positivistische Wissenschaftstheoretiker die Forderung, alle Realwissenschaften, also insbesondere auch die Humanwissenschaften, sollten sich methodologisch am Vorbild der Physik orientieren, deren Struktur damit im Idealfall einer "Einheitswissenschaft" zugrundeliegen könnte. Die Entwicklung der modernen Naturwissenschaften seit GALILEI ist gekennzeichnet durch eine Verlagerung der Fragestellungen von intentionalen Begründungs- zu kausalen Erklärungszusammenhängen ("Tatsächlich ist ja der Abbruch der Kommunikation mit der Natur, d.h. der Verzicht auf das "Verstehen" von Sinn-Intentionen die Voraussetzung der neuzeitlichen Naturwissenschaft gewesen" APEL 1973 S. 269). Erstreckt man dieses Charakteristikum der naturwissenschaftlichen Sichtweise auch auf die Humanwissenschaften und verfolgt man somit den Weg des klassischen molaren Behaviourismus, so werden intentionale Beschreibungen von Ereignissen und damit die Denkweise des anthropologischen Paradigmas als nicht mit den Maximen der wissenschaftlichen Methode vereinbar erklärt.

Im Gegensatz zum anthropologischen Paradigma steht auch eine zweite grundlegende Forderung des Positivismus und Rationalismus, die der Subjekt-Objekt-Trennung. Der Wissenschaftler als Subjekt sollte Aussagen machen, die frei von jeder subjektiven Bewertung der Ereignisse sind. Während diese Forderung in den Naturwissenschaften selbstverständlich ist, kann sie im sozialwissenschaftlichen Bereich gleichbedeutend mit dem stillschweigenden Verzicht auf die Subjektivität des Erkenntnis'objekts' werden. (" Rationalismus und Empirismus sehen es nicht als notwendig an, dem Umstand prinzipiell Rechnung zu tragen, dass in den Sozialwissenschaften qua Geisteswissenschaften das Objekt der Erkenntnis selbst im Prinzip ein virtuelles Subjekt der Wissenschaft ist, genauer: ein Kosubjekt des Wissenschaftlers, das ihn nicht nur als Thema der Beobachtung, Verhaltenserklärung und Deskription, sondern auch und sogar primär als Kommunikationspartner, und damit als Thema des "Verstehens" von Sinn-Intentionen, interessiert." APEL 1973 S. 269). Die durch die Subjekt-Objekt-Trennung bedingte Asymmetrie zwischen Wissenschaftler und Versuchsperson schliesst die Sichtweise des anthropologischen Paradigmas aus, nach der beide, Wissenschaftler und Versuchsperson, als Subjekte im Rahmen gemeinsam anerkannter Normen- und Regelsysteme agieren, und die Versuchsperson höchstens freiwillig und zeitweilig eine Rolle als bloss reagierendes Objekt übernimmt.

Während die Subjekt-Objekt-Trennung nur Beobachtung und Experiment als Quellen empirischer Daten zulässt (und die Daten dadurch notgedrungen in mechanistischer Beschreibung vorliegen), ist im anthropologischen Paradigma die Kommunikation als Interaktion im Rahmen des "obersten und immer schon anerkannten Regelsystems der Sprache" (APEL, 1973 S. 220 ff.) und allgemeiner des "kommunikativen Handelns " (HABERMAS 1971 S.101 ff.) von Bedeutung. Zu logisch analysierbaren handlungstheoretischen Aussagesystemen und damit zu Sinnzusammenhängen von Handlungen kommt man hauptsächlich durch Gespräche und gemeinsame Lebenspraxis, nicht nur durch mechanisches Registrieren. Die Maxime der wertfreien Beobachtung und der Trennung von Subjekt und Objekt, die der Auffassung von Kommunikation als Sequenz von "verbal responses" zugrundeliegt, wird hier ersetzt durch die Forderung der "Idealen Kommunikationsgemeinschaft" (APEL 1973 S. 220) und des "herrschaftsfreien Dialogs, wo jedem die gleiche Chance der Wahl von Sprechakten zugestanden wird" (HABERMAS 1971 S. 136 ff.). Bezieht man dem anthropologischen Paradigma gemäss die Möglichkeit ein, dass die Versuchsperson durch kontraprediktives Verhalten die Untersuchung ad absurdum führt, so besteht die einzige Möglichkeit, diese "self-suicidal prophecy" zu umgehen, darin, die Untersuchung unter Bezug auf inter-subjektiv anerkannte Normen zu recht-

fertigen und so der Versuchsperson deren Sinn einsichtig zu machen. So werden Auseinandersetzungen über Werte und Ziele eventuell entscheidend für das Gelingen wissenschaftlicher Untersuchungen.

Im Zusammenhang damit erscheint die Forderung von Phänomenologen wie P. WINCH (1958) sinnvoll, humanwissenschaftliche Forschungsmethoden und -ergebnisse in einer Sprache zu formulieren, die den "Objekten" verständlich ist; diese Forderung spricht gegen eine ausschliesslich formale Darstellung der Humanwissenschaften nach dem Vorbild der theoretischen Physik.

Ein entscheidender Unterschied zwischen dem mechanistischen und dem anthropologischen Paradigma wird erkennbar, seit mit der Wende der modernen Wissenschaftstheorie von der "Syntax" zur "Pragmatik" der Wissenschaften die Frage nach Praxisbezug, Zielen und Erkenntnisinteressen wissenschaftlicher Leistungen in den Vordergrund rückt. Dies lässt sich verdeutlichen an den beiden charakteristischen Analyseschemata der Wissenschaftsmethodologie, dem HEMPEL-OPPENHEIM-Schema (H-O-Schema) und dem praktischen Syllogismus (P-S-Schema).

Das H-O Schema stellt auf abstrakte und vereinfachte Art die allen Kausalanalysen zugrundeliegende Struktur dar:

> Trifft das Ereignis A ein und ist die Gültigkeit eines Naturgesetzes der Form "Immer wenn A eintrifft, trifft auch E ein" gewährleistet, so wird auch Ereignis E eintreffen.

Prämissen	Explanans :	A
	Gesetz :	Wenn A, dann E
Conclusio	Explanandum:	E

Anhand dieses Schemas lassen sich verschiedene Anwendungsmöglichkeiten wissenschaftlicher Theorien, d.h. von Systemen von Gesetzeshypothesen erläutern.

Wollen wir ein Ereignis E kausal erklären, so suchen wir ein Ereignis A und ein passendes Gesetz G, so dass E nach dem H-O Schema aus den beiden Prämissen folgt.

Wissen wir, dass ein Ereignis A eintrifft, und kennen wir ein allgemeines Gesetz der Form "Wenn A, dann E", so können wir das Ereignis E voraussagen.

Besteht die Möglichkeit, eines von mehreren Ereignissen A_i (i=1,2,) etwa A_j willkürlich zu realisieren und kennen wir mehrere Gesetze der Form "Wenn A_i, dann E_i", so können wir das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses E_j manipulieren (steuern, kontrollieren).
Die zuletzt genannte Möglichkeit wird vor allem in der Technik (und neuerdings auch in der Verhaltenstechnologie) genutzt. Mit der Bereitstellung von Kausalgesetzen gestattet die Wissenschaft die technische Verfügung von Naturprozessen, d.h. die Beherrschung der Natur zugunsten des Menschen (und die Beherrschung des Menschen durch den Menschen, siehe SKINNER's "Walden two" (1948)).

Das P-S-Schema stellt auf ebenso abstrakte und vereinfachte Weise die allen Handlungsanalysen zugrundeliegende Struktur dar:

> Strebt Person P das Ziel Z an und glaubt, P,Z nur mittels Durchführung der Handlung H erreichen zu können, so schliessen wir, dass P H durchführt.
>
> Prämissen { P hat das Ziel Z
> P glaubt, dass Z nur durch H erreichbar ist
>
> Conclusio P führt H durch.

Auch dieses Schema lässt verschiedene Anwendungsarten zu.

Kennen wir, sei es durch Kommunikation oder durch unsere Erfahrung im Umgang mit P seine Ziele und P's Vorstellungen über das, was er zur Erreichung seiner Ziele zu tun hat, so können wir P's Handlungen teleologisch erklären, sofern wir voraussetzen, dass P sich konsistent mit den Regeln der Sprache (und Lebenspraxis) und seinen Zielen und Vorstellungen gegenüber verhält. "Teleologisch" heisst hier im Gegensatz zu "kausal"; Wenn P H durchführt, so würde man sagen, er folge damit nicht einem Naturgesetz, sondern einem logischen Regelsystem. Würde P H nicht durchführen, so würde

er damit nicht ein Naturgesetz falsifizieren, sondern sich inkonsistent verhalten, er würde einen Fehler machen.

Unter denselben Voraussetzungen wie wir eine Handlung teleologisch erklären können, können wir sie prognostizieren.

Eine dritte Anwendungsmöglichkeit des P-S-Schemas ergibt sich immer dann, wenn wir Widersprüche zu erkennen glauben, sei es Unvereinbarkeiten verschiedener Ziele von P, sei es Widersprüche zwischen dem, was P tut und dem, was er anstrebt. In diesem Fall kann der Wissenschaftler durch Argumentation Einfluss auf P's Handlungen oder Vorstellungen ausüben, d.h. in offener Kommunikation mit P zur Klärung von dessen Plänen und Handlungen beitragen.

Von WRIGHT (1971) hat nachgewiesen, dass das P-S-Schema nicht auf ein H-O-Schema reduzierbar ist und dass die Explanandi der beiden Schemata sich durch die zugrundegelegte Art der Beschreibung von Ereignissen unterscheiden. Während das Explanandum des H-O-Schemas in einer physikalistischen Sprache formuliert sein muss, muss das Explanandum des P-S-Schemas in einer intentionalen Beschreibung vorliegen. Dies bedingt, dass das mechanistis-che Paradigma nur Anwendungen der unter dem H.O-Schema genannten Art zulässt, während das anthropologische Paradigma Anwendungen der unter dem P-S-Schema angeführten Art gestattet.

Darüber hinaus stellt das anthropologische Paradigma mit seinen Möglichkeit logischer Analyse im Gegensatz zum mechanistischen Paradigma eine Sprache bereit, die es dem Erkenntnis'objekt' P gestattet, selbst zum Subjekt der Umstrukturierung seiner Handlungen und Handlungsorientierungen zu werden un so zu eigenständigen Problemlösungen zu gelangen.

Der unterschiedliche Ansatz der beiden Paradigmen menschlichen Handelns bzw. Verhaltens gestattet die Aufteilung der formalen Modelle der Psychologie in zwei Klassen, die wir K-Modelle (K: kausal; mechanistisches Paradigma) und L-Modelle (L: logisch; anthropologisches Paradigma) nennen möchten.

Auf einen Unterschied zwischen K- und L-Modellen sei hingewiesen: Während als Gütekriterium für K-Modelle allein ihr Prognose- und Erklärungswert gilt, wird die Güte von L-Modellen auch daran gemessen, ob sie dem Handelnden selbst einsichtig sind, d.h. ob sie Handlungszusammenhänge in Kategorien erfassen, die der Handelnde selbst als handlungsorientierend anerkennen würde.

Bei vielen psychologischen Modellen ist unmittelbar klar, welcher Klasse von Modellen sie zuzuordnen sind. Die meisten Lernmodelle oder das Interaktionsmodell von THIBAUT und KELLY (1959) sind als K-Modelle anzusehen, während moderne Ansätze der Denkpsychologie wie etwa der "General Problem Solver" von NEWELL, SHAW und SIMON (1963) L-Modelle darstellen.

Im Bereich der Konfliktforschung sind sowohl K- wie auch L-Modelle entwickelt worden. RICHARDSON's (1960) Modell der Dynamik von Kriegen und Aufrüstungswettkämpfen verwendet die Kategorien eines K- Modells. Das Verhalten eines der beiden Gegner wird stets als Reaktion auf das des anderen angesehen: Rüstet einer auf, so auch der andere usw.. Eine Formalisierung dieses Ansatzes führt zu Differentialgleichungen mit Parametern wie Wehretat oder Zahl der eingesetzten Soldaten. Solche Formalismen gestatten bei bekannten Anfangsbedingungen, den Verlauf der gesamten Interaktion vorauszuberechnen. Nach den eben angeführten Überlegungen dürften die in der Vernachlässigung aller kognitiven Aspekte der Interaktion liegenden Grenzen dieses Ansatzes klar sein.

Die Spieltheorie dagegen liefert L-Modelle, wie sich aus dem im vorigen Paragraphen dargelegten Konfliktbegriff und den allen spieltheoretischen Modellen zugrundeliegenden Begriffsbildungen Alternative, Entscheidung, Regel, Rationalität, Strategie usw. erkennen lässt.

Auf die unterschiedlichen Ansätze zur Konfliktforschung hat A. RAPOPORT (1972) als erster hingewiesen. Er beschreibt das Vorgehen eines Wissenschaftlers bei der Analyse eines Schachspiels:

"... Er macht sorgfältige, quantitative Beobachtungen. Zuerst stellt er fest, was konstant und was variabel ist. Es scheint, dass die Personen, die einander am Schachbrett gegenübersitzen, immer wieder wechseln, dass aber das Schachbrett und die darauf befindlichen Objekte die gleichen bleiben. So schliesst er, dass die auf dem Brett befindlichen Objekte und nicht die am Schachbrett einander gegenübersitzenden Personen die wesentlichen Ereignisse bestimmen. Als nächstes stellt der Wissenschaftler das charakteristische Merkmal der Ereignisse fest, nämlich die Tatsache, dass die Anzahl der Figuren auf dem Brett sich im Laufe eines Spiels ständig vermindert So beginnt er die Gesetze dieses Vorgangs zu untersuchen. Er setzt die durchschnittliche Zahl der Figuren auf dem Brett mit der Zeit in Verbindung und

überträgt die Werte auf ein Koordinatensystem. Bald sieht er beachtlich erscheinende Verfallskurven vor sich ...
... Als nächstes stellt der Wissenschaftler fest, dass die Gleichungen der Kurven bestimmten Differentialgleichungen entsprechen.... die Theorie ist für das Verständnis des Schachspiels sicher ohne Nutzen und Interesse ... Hätte der Wissenschaftler verstanden, dass das, was auf seiner Tabelle erscheint, nur eine Widerspiegelung dessen ist, was im Hirn der Spieler vor sich geht, so wäre er an das Spiel vom Standpunkt der Spieler herangegangen. Er hätte sie gefragt, was sie täten, und so hätte man ihm das Spiel erklärt, nämlich seine Regeln, seine Ziele und die wichtigen Überlegungen, aus denen die Struktur der Schachstrategie besteht."
Zum Abschluss noch eine Bemerkung zu dem wechselseitigen Verhältnis der beiden Paradigmen bzw. Klassen von Modellen. Der Begriff "Paradigma" wurde in den vorliegenden Überlegungen in dem von T.S. KUHN (1967) erläuterten Sinn verwendet. Ein Paradigma besteht nach KUHN aus anerkannten wissenschaftlichen Leistungen, die für eine gewisse Zeit einer Gemeinschaft von Fachleuten Modelle und Lösungen liefern. Es enthält wissenschaftliche Grundanschauungen, eine Art umfassenden Weltbildes, Ers-cheinungen, die den Wissenschaftler zu einer bestimmten Zeit natürlich und nicht mehr erklärungsbedürftig erscheinen. KUHN zeigt an vielen Beispielen, dass Wissenschaft sich stets auf der Grundlage solcher Paradigmen entwickelt und dass Wissenschaftler, die sich im Rahmen verschied ener Paradigmen bewegen, auch wenn es um dieselbe Sache geht, verschiedene Probleme und verschiedene Sprachen haben, was eine Verständigung extrem erschwert.

Man kann also kaum erwarten, dass sich eins der beiden Paradigmen oder darauf basierende Modelle mit Hilfe einer Argumentation aus dem andern Paradigma kritisieren lässt. Man kann höchstens hoffen, dass einer der beiden Ansätze sich gewissen Zielen gegenüber als angemessener und brauchbarer erweist als der andere. Da Handeln meist weder rein reaktiv ist wie etwa Reflexe noch rein intentional wie das strategische Handeln im Gesellschaftsspiel, sehen Dialektiker wie HABERMAS und APEL die beiden Paradigmen als komplementär und sich ergänzend an. Objektive Aussagen über menschliches Handeln stossen dann an ihre Grenzen, wenn die Bereitschaft der Handelnden, die Rolle der Objekte zu übernehmen, nicht mehr gegeben ist, während die intersubjektive Beziehung zwischen Wissenschaftlern und Kommunikationspartner einer objektivierenden Distanz weichen muss, wenn Kommuni-

rationsverzerrungen aufzudecken und zu beheben sind. Zwar bewegt man sich immer im Vorstellungskreis des einen Paradigmas, darf aber die Möglichkeit der Sichtweise im andern dabei nicht aus den Augen verliegen.

Im folgenden werden wir uns nur noch dem anthropologischen Paradigma zuwenden und den grundlegenden Begriff der Regel näher untersuchen.

§ 5 Konstitutive und regulative Regeln

Aus der pragmatischen Linguistik stammt eine Unterscheidung von zwei Arten von Regeln, die auch für die Grundlegung der Spieltheorie fruchtbar erscheint(SEARLE 1971 S.54 ff.)
Einerseits gibt es die Spielregeln, Regeln wie die des Schachspiels etwa: " Die Bauern rücken senkrecht vor, schlagen aber diagonal" oder "Wenn man den König des Gegners bedroht, muss man 'Schach' sagen." Diese Regeln definieren sozusagen das Schachspiel; jeder, der Schach spielt, muss sie anerkennen; wer sie verletzt, spielt kein Schach mehr. Daher werden solche Regeln konstitutive Regeln genannt.

Die Spieler dürfen die konstitutiven Regeln zwar nicht verletzen, aber innerhalb des Systems dieser Regeln gibt es noch entscheidende Handlungsfreiheiten. Es ist beim Schachspiel nicht vorgeschrieben, welche Figur man zieht oder wie weit man Läufer, Turm oder Dame vorrückt usw.. Die Entscheidungen der Spieler innerhalb des durch die konstitutiven Regeln vorgeschriebenen Rahmens sind aber nicht vollkommen unstrukturiert, sondern werden durch die in den Schachbüchern als vernünftige Strategien angeführten Regeln geleitet, Regeln wie etwa: "Insbesondere ist die französiche Eröffnung empfehlenswert, die von manchen sogar als die für schwarz sicherste Spielweise bezeichnet wird" (MITIS 1958), "Wenn man sich mit zwei Figuren gegen eine Dame zu verteidigen hat, muss man darauf achten, die Figuren in der Nähe des eigenen Königs zu halten, damit sie nicht so leicht von der Dame abgefangen werden können." (MITIS 1958). Regeln dieser Art wollen wir regulative Regeln nennen, weil sie das Verhalten der Spieler regeln und nicht die Situation definieren. Charakteristisch für diese Regeln ist, dass keineswegs alle Spieler sie akzeptieren müssen. Sie können in Frage gestellt werden, und man kann darüber diskutieren, welche von mehreren Alternativregeln die im konkreten Fall akzeptabelste ist.

Während die Kenntnis der konstitutiven Regeln uns dazu verhilft, die Situation mit den Augen der Spieler zu sehen und damit erst ein adäquates Situationsverständnis ermöglicht, eröffnet uns die Kenntnis der regulativen Regeln einen Zugang zur Einsichtigkeit in die Dynamik des Spielverlaufs und in Argumentation und Entscheidungsverhalten der Spieler.

Der spieltheoretische Ansatz zur Konfliktforschung geht nun von der Annahme aus, dass sich eine Konfliktsituation, die den in Paragraph 3 angeführten Bedingungen genügt, durch ein System von konstitutiven Regeln erfassen lässt, welches zwei grundlegenden Bedingungen genügt:

1.) Das Regelsystem wird von allen Beteiligten anerkannt.

2.) Es ist in sich widerspruchsfrei.

Bedingung 1 entspricht der Definition der konstitutiven Regeln, schränkt aber die Anwendbarkeit der Spieltheorie in der Konfliktforschung stark ein. Konfliktsituationen, die von den verschiedenen Beteiligten verschieden wahrgenommen werden, lassen sich unter Umständen spieltheoretisch nicht erfassen. Es gibt Ansätze in der Spieltheorie, diese Voraussetzung aufzugeben, die aber kaum Ergebnisse zeigten und nicht weiterverfolgt wurden. (LUCE und RAIFFA 1957 S. 269 ff.)
Bedingung 2 garantiert, dass nie ein am Konflikt Beteiligter in eine ausweglose Situation kommt, eine Situation, wo er gleichzeitig zwei Regeln folgen muss, aber nicht folgen kann, weil sie miteinander unvereinbar sind. Damit werden wichtige Bereiche, wie pragmatische Paradoxien, "double bind" (WATZLAWICK, BEAVIN, JACKSON 1969) und gewisse Rollenkonflikte aus dem spieltheoretischen Anwendungsbereich ausgeschlossen.

Ein System konstitutiver Regeln schreibt normalerweise keinem Spieler eindeutig vor, was er zu tun hat, sondern lässt ihm gewisse Entscheidungsfreiheiten: Es gibt verschiedene mögliche Handlungsverläufe.
Welcher dieser Handlungsverläufe konkret realisiert wird, hängt ab von den Entscheidungen der Spieler und eventuell von Zufälligkeiten der Natur.
Um die Rationalität dieser Entscheidungen zu erfassen, braucht man die subjektiven Bewertungen aller möglichen Handlungsverläufe durch jeden Spieler. Diese Handlungsverläufe werden in die Spieltheorie als numerische Grössen eingeführt, ohne dass ihr Zustandekommen analysiert wird. Man hofft eher, Handlungsbewertungen auf direktem empirischen Weg zu erhalten. Trotzdem

wollen wir eine Bemerkung zu dem Zustandekommen von Handlungsbewertungen einfügen:
Ein antizipierter Handlungsverlauf wird nach zwei Aspekten bewertet:

1.) Wie wertvoll ist der Zielzustand, zu dem die Handlung führt, im Vergleich zum jetzigen Zustand ?

2.) Wie wird die Durchführung der Handlung selbst bewertet ?

a) Welche Belastung bringt sie mit sich ?
(an Kosten, an Energieaufwand, an Stress usw)
b) Welche Befriedigung bringt sie mit sich ?

Da in der experimentellen Spieltheorie bisher fast ausschliesslich einfache Entscheidungsexperimente durchgeführt wurden, wurden die unter 2 angeführten Aspekte der Handlungsbewertung durchweg vernachlässigt.

Oft wird ein Teil der Bewertung schon durch die konstitutiven Regeln vorgeschrieben; bei Gesellschaftsspielen z.B. wird erwartet, dass der Zielzustand des Gewinns höher bewertet wird als der des Verlierens, es wird aber nicht vorgeschrieben, ob man lieber schnell oder langsam gewinnt.
Die Spieltheorie verfolgt nun eine dreifache Strategie:

Erstens werden die Systeme konstitutiver Regeln weiter formalisiert, bis sie sich in einige einfache Klassen von formalen Systemen einordnen lassen,

zweitens werden in diese Systeme die quantifizierten Bewertungen der Spieler eingeführt,

und drittens werden für diese abstrahierten Konfliktsituationen Systeme von regulativen Regeln entwickelt, die als Lösungsmodelle das Entscheidungsverhalten der Spieler entweder beschreiben oder vorschreiben wollen.

Für jeden formalisierten Konflikt gibt es viele solche regulative Regeln, genau wie es viele verschiedene Tips und Empfehlungen in Schachbüchern gibt. Für eine Klasse von Konflikten (Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen) wollen wir die bisher entwickelten Regelsysteme und die daraus deduzierbaren Möglichkeiten empirischer Überprüfung in Kapitel 2 vorstellen

§ 6 Spiele in Normalform

Es sei nun ein System konstitutiver Regeln vorgegeben. Eine erste Klassifikation geht danach vor, welche Anzahl von Spielerrollen in diesem System involviert ist.

> Ein n-Personen-Spiel ist ein Regelsystem, in dem Rollen für n Spieler vorgesehen sind (n=2,3,4...).

> Ein n-Personen-Spiel liegt in Normalform vor, wenn es für jeden Spieler nur aus einem Zug (= einer Strategie) besteht: d.h. jeder Spieler i hat genau eine Alternative A^i_j aus einer Alternativenmenge $A^i = \{A^i_1, A^i_2, \ldots\ldots A^i_{m_i}\}$ zu wählen.

Die Spielregeln des Knobelns bestimmen unmittelbar ein Spiel in Normalform: jeder Spieler hat, ohne Kenntnis der Entscheidungen der übrigen Spieler, zwischen den fünf Alternativen Feuer, Wasser, Papier, Schere und Stein zu wählen.

Beim Schachspiel sieht die Sache anders aus: Hier besteht der Spielverlauf nicht aus einfachen Entscheidungen, sondern aus Folgen von Entscheidungen, die von beiden Spielern alternativ gefällt werden. Um dieses Spiel in Normalform zu bringen, brauchte man für jeden Spieler i eine Reihe von Büchern, wobei in jedem Buch alle nur denkbaren Figurenstellungen aufgelistet wären und für jede Stellung eine Anweisung gegeben wäre, wie Spieler i im nächsten Zug zu setzen hat. Von diesen Büchern brauchte man soviele, dass alle denkbaren Spielverläufe durch irgendein Bücherpaar (für jeden Spieler ein Buch) erfasst wären. Das gesamte Spiel wäre dann darauf reduziert, dass jeder Spieler aus seiner Bibliothek ein bestimmtes Buch aussuchte.
Da jeder Spieler bei n-Personen-Spielen in Normalform nur eine aus mehreren Alternativen auswählt, wird der gesamte Spielverlauf V solcher Spiele durch ein n-Tupel von Alternativen beschrieben.

$$V = \{A^1_{l_1}, A^2_{l_2}, \ldots\ldots A^n_{l_n}\}, \qquad l_i \in \{1, \ldots\ldots m_i\}.$$

Jedes n-Tupel V von Alternativen beschreibt also einen möglichen Handlungsverlauf. Sei $\{ V_1, V_2 \ldots V_j \ldots \}$ die Menge aller möglichen Handlungsverläufe. An dieser Stelle lassen sich in einfacher Weise die Bewertungen der Spieler einführen. Es sei vorausgesetzt, dass jeder Spieler die möglichen n-Tupel von Alternativen V_j (j = 1,2,3...) in eine subjektive Präferenzreihe ordnen kann. Jedem V_j können wir dann eine reelle Zahl $u_i(V_j)$ so zuordnen, dass

$$u_i(V_l) > u_i(V_m)$$

gilt, falls Spieler i den Handlungsverlauf V_l dem Handlungsverlauf V_m vorzieht.

Die Funktionen $u_i(V_j)$ i = 1,2...n, heissen Nutzenfunktionen.
An die Nutzenfunktionen werden noch weitere Bedingungen gestellt, die aber von Lösungstheorie zu Lösungstheorie variieren und deshalb erst in Kapitel 2 besprochen werden.
Eine halbwegs übersichtliche Darstellung von Nutzenfunktionen mit kleinen n (n = 2,3) gestattet die Matrizenschreibweise.
Ein Beispiel dazu:

$n=2 \quad m_1=2 \quad m_2=3$

	A_1^2	A_2^2	A_3^2
A_1^1	(2,3)	(1,5)	(3,9)
A_2^1	(1,7)	(0,3)	(6,6)

1.Zahl: u_1
2.Zahl: u_2

In n-Personen-Spielen in Normalform werden weitere Klassifikationen eingeführt.

1.) Spiele mit Kommunikationsmöglichkeiten versus Spiele ohne Kommunikationsmöglichkeit.
In den ersteren besteht für die Spieler die Möglichkeit zu kooperieren, indem sie ihre Entscheidungen durch Absprachen aufeinander abstimmen, in den letzteren sind solche Absprachen unmöglich oder durch die Spielregeln verboten.

2.) Spiele mit Seitenzahlungen versus Spiele ohne Seitenzahlungen.
In Spielen mit Seitenzahlungen gibt es eine beliebig aufteilbare und beliebig zwischen den Spielern transferierbare Gütermenge (z.B. Geld). Dadurch wird gewährleistet, dass der gemeinsame Gewinn mehrerer Spieler bei Kooperationsbereitschaft auf verschiedene Arten aufgeteilt werden kann. In Spielen ohne Seitenzahlungen ist die Gewinnübertragung von einem Spieler zum anderen unmöglich oder verboten.

§ 7 Grenzen des spieltheoretischen Ansatzes

Drei Arten von Grenzen des spieltheoretischen Ansatzes haben wir schon im vorigen Paragraphen kennengelernt:

Die Spieltheorie liefert keine Aussagen:

1.) für Situationen, die von verschiedenen Beteiligten unterschiedlich wahrgenommen werden,

2.) für Situationen, die durch widersprüchliche Regelsysteme charakterisiert sind und

3.) für Situationen, in denen die Voraussetzungen der Nutzentheorie nicht erfüllt sind.

Eine weitere, ganz grundlegende Grenze der Anwendbarkeit spieltheoretischer Modelle liegt in der Trennung von Regeln in solche konstitutiver und solche regulativer Art, in Regeln also, die man fraglos akzeptiert oder akzeptieren muss, und solche, über die man nachdenkt, deren Vor- und Nachteile man gegeneinander abwägt und für oder gegen die man sich entscheidet. Diese Klassifizierungsart von Regeln wird aus zwei Aspekten heraus eingeschränkt:

1.) Die Trennung ist sicher sinnvoll bei Gesellschaftsspielen, wo ein System von starr vorgegebenen und genau formulierten Spielregeln die Situation definiert, in begrenztem Ausmass mag sie auch noch angehen bei ökonomischen oder sozialen Konflikten, deren Regeln durch Verträge und bindende Absprachen fixiert sind (obwohl auch hier schon der Handlungsspielraum bewusst über die legalen Möglichkeiten hin ausgedehnt werden kann, wobei man Strafen einkalkuliert). Fragwürdig wird sie aber etwa bei Konflikten in Familien, wo die "Spielregeln" nicht starr sind, sondern eher Normen oder Gewohnheiten, die man in Ausnahmefällen auch

verletzten kann. Hier ist oft unklar, welche Regeln als regulative und welche als konstitutive anzusehen sind.

2.) Indem die Spieltheorie von einem gemeinsamen institutionellen Rahmen der Spieler ausgeht, hat sie die Tendenz, die Reflexion über grundsätzliche Änderungen dieses Rahmens zu vernachlässigen. Dagegen würde ein ideologiekritischer Ansatz betonen, dass eine adäquate Konfliktlösung häufig gerade in einer Umstrukturierung besteht und dementsprechend die bestehende Institutionen auf Notwendigkeit, Sinn und Ziele hinterfragen.

KAPITEL 2

Die mathematischen Theorie der Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen

§ 8 Grundlegende Definitionen

Wir wollen im folgenden die wichtigsten Begriffsbildungen und Theoreme der mathematischen Theorie der Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen darstellen und uns gleichzeitig die inhaltliche Bedeutung der formalen Darstellungen vergegenwärtigen.

Es werden keine Voraussetzungen an die mathematischen Vorkenntnisse des Lesers gestellt. Theoreme wollen wir nur für Spiele mit drei Personen beweisen. Für den allgemeinen Fall von n Personen ($n \geq 3$) beschränken wir uns auf Hinweise.

Sei $N = \{1,2,3\}$ die Spielermenge. Jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq N$ heisst Koalition.
In Drei-Personen-Spielen gibt es 7 mögliche Koalitionen:

die Einer-Koalitionen $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$;
die Zweier-Koalitionen $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$
und die grosse Koalition $\{1,2,3\}$.

Die Menge P(N) sei jene Menge, die alle möglichen Koalitionen, also bei Drei-Personen-Spielen die 7 angeführten Koalitionen, als Elemente enthält.

Da Persönlichkeitsmerkmale und andere individuelle Attribute der Spieler in der Spieltheorie nicht berücksichtigt werden, können wir diese jederzeit umbenennen, d.h., ihnen die drei Ziffern 1,2, 3 in beliebiger Weise zuordnen. Das erspart manchmal Schreibarbeit und erleichtert die Darstellung.

Wir wollen für die folgenden Überlegungen eine Indexkonvention vereinbaren. Kleine Indizes i,j,k bezeichnen die Spieler. Aussagen gelten, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, für alle i,j,k $\in \{1,2,3\}$ mit $i \neq j \neq k$.

§ 9 Die charakteristische Funktion und die Normalform des Spiels

Für unsere Überlegungen zentral ist der Begriff der "charakteristischen Funktion". Diese Funktion gibt an, welchen Gewinn sich jede Koalition unabhängig von den Entscheidungen der nicht an der Koalition beteiligten Spieler sichern kann. Der Gewinn kann dabei auf zwei Arten interpretiert werden (siehe § 10). Bei beiden Interpretationen sind folgende Voraussetzungen für die Darstellung von Interessenkonflikten durch die charakteristische Funktion notwendig:

a) Der Gewinn jeder Koalition muss durch eine reelle Zahl darstellbar sein.

b) Die Bildung jeder Koalition muss möglich sein, es soll also keine Verbote für die Bildung irgendeiner Koalition geben. (Diese Voraussetzung wird im Konzept der ν -Stabilität (LUCE-RAIFFA 1957 S 220 ff.) aufgegeben).

c) Jede Koalition muss fähig sein, ihren Gewinn beliebig aufzuteilen. Dies ist insbesondere dann gewährleistet, wenn Seitenzahlungen zwischen den Spielern durch eine beliebig aufteilbare und transferierbare Nutzenmenge, wie Geld, möglich sind.

d) Jeder Spieler muss die möglichen Gewinne aller Koalitionen kennen.

e) Für die mathematische Theorie grundlegend ist schliesslich die Forderung: Schliessen sich zwei Koalitionen ohne gemeinsame Mitglieder zu einer Koalition zusammen, so können sie gemeinsam zumindest die Summe der Gewinne erreichen, die sie auch schon einzeln durchsetzen können.

Die formale Definition der charakteristischen Funktion lautet damit:

Die charakteristische Funktion v ist eine Abbildung der Koalitionenmenge P(N) in die Menge der reellen Zahlen mit

$$[9.1] \quad v(A \cup B) \geq v(A) + v(B) \quad \text{für alle } A,B \in P(N) \text{ mit } A \cap B = \emptyset.$$

Die Forderung [9.1] heisst "Superadditivität der charakteristischen Funktion".

Die 7 Zahlen, welche die charakteristische Funktion eines Drei-Personen-Spiels bestimmen, wollen wir im folgenden vereinfacht mit

$$v_1, v_2, v_3, v_{12}, v_{13}, v_{23} \text{ und } v_{123}$$

bezeichnen.

Es gibt zwei verschiedene Klassen von Problemen, die sich unter entsprechenden Voraussetzungen formal durch charakteristische Funktionen beschreiben lassen:

a) Die unproblematischere Klasse von Situationen ist die, wo der mögliche Gewinn jeder Koalition von vornherein klar ist. Ein einfaches Beispiel dazu:

Drei Besitzer von aneinandergrenzenden Grundstücken wollen ihr Land verkaufen. Es finden sich 7 Interessenten.

3 potentielle Käufer wollen Wochenendhäuser errichten und interessieren sich für die drei Grundstücke, jeder für ein anderes;

3 Interessenten möchten Wohnhäuser bauen und daher je zwei zusammenhängende Grundstücke kaufen;

eine Baugesellschaft möchte das gesamte Land aufkaufen.

Es bestehen feste Angebote der 7 Interessenten.

Das Problem lautet nun: an welchen oder welche Käufer wird verkauft und wie teilen die Verkäufer den Gewinn untereinander auf, oder: wie sehen die Koalitionsverhandlungen und Preisverhandlungen der Verkäufer aus ?

b) Komplizierter liegt der Fall, wenn primär nicht von Koalitionen die Rede ist, sondern von Entscheidungen einzelner Spieler, die aber innerhalb von Koalitionen zum gemeinsamen Nutzen aller Koalitionspartner koordiniert werden können, d.h. wenn wir ein Drei-Personen-Spiel in Normalform vorliegen haben. Unter gewissen Annahmen über die den Entscheidungen der Spieler zugrundeliegenden Regeln lässt sich ein Spiel in Normalform auf ein Spiel in Form der charakteristischen Funktion reduzieren. Gemäss diesen Annahmen strukturiert jeder Spieler, bevor er sich entscheidet, die Situation durch folgende Überlegungen:

1.) Welchen Gewinn kann sich jeder Spieler allein sichern, selbst wenn die beiden anderen die für ihn ungünstigste Entscheidung treffen ?
Dies führt zu drei Zahlen v_1, v_2 und v_3 :

$$(9.2)\quad \begin{aligned} v_1 &= \max_{l} \min_{m,n} (u_1(A_l^1, A_m^2, A_n^3)) \\ v_2 &= \max_{m} \min_{l,n} (u_2(A_l^1, A_m^2, A_n^3)) \\ v_3 &= \max_{n} \min_{l,m} (u_3(A_l^1, A_m^2, A_n^3)) . \end{aligned}$$

2.) Welchen gemeinsamen Nutzen können sich jeweils zwei Spieler durch Koordination ihrer Strategien sichern, unabhängig davon, wie der dritte Spieler sich entscheidet ?
Dies führt zu drei Zahlen v_{12}, v_{13}, und v_{23}:

$$(9.3)\quad \begin{aligned} v_{12} &= \max_{l,m} \min_{n} (u_1(A_l^1, A_m^2, A_n^3) + u_2(A_l^1, A_m^2, A_n^3)) \\ v_{13} &= \max_{l,n} \min_{m} (u_1(A_l^1, A_m^2, A_n^3) + u_3(A_l^1, A_m^2, A_n^3)) \\ v_{23} &= \max_{m,n} \min_{l} (u_2(A_l^1, A_m^2, A_n^3) + u_3(A_l^1, A_m^2, A_n^3)) . \end{aligned}$$

3.) Welcher Gewinn v_{123} ist bei Koordination der Entscheidungen aller drei Spieler erreichbar ?

$$[9.4] \quad v_{123} = \max_{l,m,n} (u_1(A_l^1,A_m^2,A_n^3)+u_2(A_l^1,A_m^2,A_n^3)+u_3(A_l^1,A_m^2,A_n^3)).$$

4.) Der weitere Ablauf der Verhandlungen und Entscheidungsprozesse basiert ausschliesslich auf den so erhaltenen v-Werten, die wir auch Koalitionsstärken nennen wollen.

Wegen $v_{12} = \max_{l,m} \min_{n}(u_1(A_l^1,A_m^2,A_n^3)+u_2(A_l^1,A_m^2,A_n^3)) \geq$

$$\geq \max_{l} \min_{m,n}(u_1(A_l^1,A_m^2,A_n^3))+\max_{m} \min_{l,n}(u_2(A_l^1,A_m^2,A_n^3)) = v_1+v_2$$

und entsprechend $v_{ij} \geq v_i+v_j$ und $v_{123} \geq v_{ij}+v_k$

erfüllen die 7 Zahlen $v_1,v_2,\ldots\ldots\ldots v_{123}$ die Bedingungen [9.1] einer charakteristischen Funktion.

Die Reduktion der Normalform führt in dem Beispiel aus § 6 auf:

$v_1 = 1$ (Wahl A_1^1), $v_2 = 6$ (Wahl A_3^2), $v_{12} = 12$ (Wahl A_2^1,A_3^2)

Falls die charakteristische Funktion das Spielerverhalten deskriptiv erfassen soll, lässt sich die Gültigkeit von Annahme 4 mit den Definitionen 1,2 und 3 experimentell überprüfen.

§ 10 Zwei Interpretationen von charakteristischen Funktionen und Gewinn

Es lassen sich zwei verschiedene Interpretationen der charakteristischen Funktion angeben, die auch für die Durchführung der formalen Theorie erhebliche Konsequenzen beinhalten. Falls wir von der Normalform eines Spiels ausgehen, gelten entsprechende Interpretationen schon für die Funktionen u_i.

Erste Interpretation

Diese Interpretation geht von folgenden Annahmen aus:

a) Die charakteristische Funktion v liefert ein objektives, d.h. intersubjektiv gültiges Mass für den materiellen Gewinn der Koalitionen.

b) Der materielle Gewinn ist beliebig aufteilbar (z.B. Geld).

c) Das Mass hat Intervallskalenqualität.

d) Für jeden Spieler existiert eine ordinale und monoton steigende Nutzenfunktion über seinem materiellen Gewinn.

Hierzu einige Bemerkungen:

Die Messung des materiellen Gewinns jedes Spielers ist ein physikalisches und kein psychologisches Problem; daher ist Forderung c unproblematisch.
Für die Nutzenfunktionen der Spieler wird weder Messung auf Intervallskalenniveau noch interpersoneller Nutzenvergleich vorausgesetzt.

Die vorliegende Interpretation von v ist auch dann anwendbar, wenn die Verhandlung primär nicht um Geld geht, sondern um irgendwelche alternativen Handlungsverläufe, die aber durch subjektive Geldäquivalente ersetzbar sind.
Im Rahmen dieser Interpretation sind die Lösungsmodelle von Imputation, Kern und Bargaining Set formulierbar, nicht aber die Modelle des Nucleolus, der Gleichaufteilung und des Gleichaufteilungskerns, welche interpersonellen Nutzenvergleich voraussetzen.

Zweite Interpretation

Die zweite Interpretation der charakteristischen Funktion geht von der Annahme aus, dass v ein Mass für den subjektiven Gesamtnutzen jeder Koalition darstellt. Hierfür sind folgende Voraussetzungen notwendig:

a) Der Nutzen jedes Spielers muss auf Intervallskalenniveau messbar sein;

b) ein interpersoneller Nutzenvergleich, d.h. die Vergleichbarkeit der Nutzeneinheit verschiedener Spieler, muss möglich sein;

c) Die Aufteilbarkeit des Gesamtnutzens v(S) jeder Koalition S muss gewährleistet sein, d.h. jede Nutzenaufteilung $(u_1 \ldots . u_s)$ mit $\sum_{i=1}^{s} u_i = v(S)$ muss erreichbar sein.

Zu Forderung b ist zu bemerken, dass die marxistische Arbeitswerttheorie einen Lösungsansatz zum Problem des interpersonellen Nutzenvergleichs liefert. Gleicher Nutzen bedeutet hier: mit dem gleichen Arbeitsaufwand erreichbar (siehe dazu ASZARUS 1974).

Forderung c wollen wir nun näher untersuchen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Forderung zu erfüllen. Der allgemeinste Fall besteht darin, dass die Mitglieder jeder Koalition S zwischen sehr vielen Handlungsalternativen wählen können, deren Nutzen sich jeweils gerade zu v(S) addiert, so dass jede Aufteilung von v(S) durch ein bestimmtes s-Tupel von Entscheidungen erreicht werden kann.
Wir wollen nun den Fall betrachten, wo diese Handlungsalternativen eine spezielle Form haben:
Die Spieler fällen erst irgendwelche Entscheidungen mit

$$[10.1] \qquad \sum_{i \in S} u_i = v(S)$$

Es sei nun eine beliebig aufteilbare Gütermenge wie Geld vorhanden, so dass alle andern Nutzenverteilungen, die Gleichung [10.1] genügen, durch "Seitenzahlungen" der Spieler untereinander erreicht werden können. In diesem Fall führt Forderung c nach Theorem 1 zu einer linearen Abhängigkeit der Nutzenfunktionen von der Gütermenge.

Theorem 1: Es sei v die charakteristische Funktion eines Drei-Personen-Spiels und jede Aufteilung $(u_1^S \ldots . u_s^S)$ des Koalitionsgewinns v(S) (für alle Koalitionen S) durch Seitenzahlungen (Variable x) erreichbar. Die Abhängigkeit der Nutzenfunktionen von x sei streng monoton und stetig.
Dann gilt:

$$[10.2] \qquad u_i^S(x) = u_i^S(0) + a \cdot x \text{ mit einem } a \neq 0$$

für alle S und jedes $i \in S$.

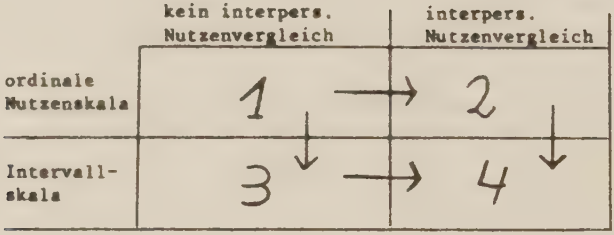
Der Beweis dieses Theorems befindet sich wie die der folgenden Theoreme im Anhang A1.
Theorem 1 gilt nicht für Zwei-Personen-Spiele. Sei etwa
$u_1(x) = u_1(0) + e^x - 1$ und $u_2(x) = u_2(0) + 1 - e^{-x}$. Weiter sei
$u_1(0) + u_2(0) = v_{12}$.
Dann gilt $u_1(x) + u_2(-x) = u_1(0) + u_2(0) + e^x - 1 + 1 - e^x = v_{12}$ für alle x.

Die beiden Spieler können also durch Seitenzahlungen ihren gemeinsamen Nutzen v_{12} beliebig aufteilen, obwohl ihre Nutzenfunktionen nicht linear von der Grösse der Seitenzahlungen abhängen.

Zusammenfassung:

Für Spiele mit Seitenzahlungen ergeben sich 4 Möglichkeiten:

[10.3]



"A → B" bedeutet: Die für Fall A entwickelten Theorien lassen sich auch für Fall B anwenden. Für Feld 2 und 3 sind bisher keine speziellen Theorien entwickelt worden.

§ 11 Zwei Ansätze zur Nutzentheorie

a) Die Nutzentheorie von von NEUMANN und MORGENSTERN (1953)

Gegeben seien drei Objekte oder Alternativen A,B und C, wobei A gegenüber B und C, und B gegenüber C bevorzugt wird.

[11.1] $C \prec B \prec A$

Wir ordnen nun den Alternativen A und C willkürlich die Nutzenwerte

$$u(C) = 0 \quad \text{und} \quad u(A) = 1$$

zu. Welchen Nutzen bekommt B dann ?

Soll die ">"-Relation zwischen Zahlen die Beziehung [11.1] repräsentieren so können wir offensichtlich jede Zahl $0 < u(B) < 1$ wählen. Auf diese Weise kommen wir nur zu einer ordinalen Nutzenskala.
Die zentrale Idee von von NEUMANN und MORGENSTERN besteht darin, auch Lotterien als Alternativen zuzulassen. Eine Lotterie ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Alternativen.

$L_p = (p,A;(1-p),C)$ bedeutet: mit Wahrscheinlichkeit p tritt Alternative A ein und mit Wahrscheinlichkeit 1-p Alternative C. Wegen [11.1] wird bei grossem p die Lotterie der Alternative B vorgezogen:

$$L_p \succ B \quad \Leftrightarrow \quad u(L_p) > u(B) \; ;$$

ist p klein, so gilt:

$$L_p \prec B \quad \Leftrightarrow \quad u(L_p) < u(B).$$

Von NEUMANN und MORGENSTERN gehen nun davon aus, dass immer irgendein p-Wert existiert, so dass L_p den gleichen Nutzen wie B hat:

$$u(L_p) = u(B).$$

Setzen wir weiterhin die Gültigkeit von Gleichung

[11.2] $\quad u(L_p) = u(p,A;(1-p),C) = p \cdot u(A) + (1-p) \cdot u(C)$

voraus, so erhalten wir für u(B) den eindeutig bestimmten Wert

$$u(B) = p \cdot u(A) + (1-p) \cdot u(C) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p.$$

Damit erreichen wir also eine Nutzenskala von Intervallskalenqualität.

Gleichung [11.2] heisst "expected utility hypothesis", weil sie von der Annahme ausgeht, der Nutzen einer Lotterie sei gleich dem erwarteten Nutzen ihrer Komponenten. Mögliche Abhängigkeiten des Nutzens vom Risiko des Spiels bleiben bei Annahme der "expected utility hypothesis" unberücksichtigt. Dadurch wird gerade der psychologische Anwendungsbereich der vorliegenden Nutzentheorie eingeengt. (Auf die Problematik, die sich bei Einführung subjektiver Wahrscheinlichkeiten zusätzlich ergibt, soll hier nicht eingegangen werden)
Es gibt verschiedene axiomatische Darstellungen der von NEUMANN-MORGENSTERNschen Nutzentheorie, u.a. bei von NEUMANN-MORGENSTERN (1953), LUCE-RAIFFA (1957) und OWEN (1971).

b) Nutzenmessung auf Hyperordinalskalenniveau

Der zweite interessante Ansatz zu intervallskalierten Nutzenfunktionen basiert nicht auf der Möglichkeit der Lotteriebildung, sondern auf der des Vergleichs von subjektiven Unterschieden zwischen je zwei Alternativen.

Gegeben sei eine Menge von n Alternativen $A_1 \ldots\ldots A_n$ und eine 4-stellige Ordnungsrelation, die Vergleiche zwischen den Nutzendifferenzen von je zwei Alternativen erfasst.

[11.3] $\qquad (A_i,A_j) \succ (A_l,A_m)$

heisst: Der Nutzenunterschied zwischen A_i und A_j wird für grösser gehalten als der zwischen A_l und A_m.
Unser Ziel besteht darin, eine Nutzenfunktion u zu finden, so dass [11.3] durch

[11.4] $\qquad u(A_i) - u(A_j) > u(A_l) - u(A_m)$

repräsentiert wird. Im
1. Schritt nummerieren wir die Alternativen so um, dass ihre Nutzenwerte eine aufsteigende Reihe bilden (vorausgesetzt, dies sei möglich), d.h.

$$(A_1,A_2) \prec (A_1,A_3) \prec (A_1,A_4) \prec \ldots\ldots\ldots\ldots \prec (A_1,A_n)$$

Damit erreichen wir

[11.5] $\qquad A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec \quad \ldots\ldots\ldots \prec A_n.$

2. Schritt: Wir ordnen A_1 und A_n willkürlich die Nutzenwerte

$$u(A_1) = 0 \quad \text{und} \quad u(A_n) = 1$$

zu.

3. Schritt: Wir betrachten eine Alternative A_i $(0 < i < n)$.
Gehen wir von [11.5] aus, so erhalten wir

[11.6] $\qquad 0 < u(A_i) < 1,$

d.h. wir können den Wert $u(A_i)$ beliebig auf dem Intervall (0,1) verschieben, ohne Relation [11.5] zu verletzen.
Es besteht aber auch die Möglichkeit, nach [11.3] die Unterschiede (A_i,A_1) und (A_n,A_i) zu vergleichen. Sei etwa $(A_i,A_1) \succ (A_n,A_i)$, also

wegen [11.4]

$$u(A_i) - u(A_1) > u(A_n) - u(A_i).$$

Einsetzen von $u(A_1) = 0$ und $u(A_n) = 1$ ergibt:

$$1/2 < u(A_i) < 1.$$

Wir können $u(A_i)$ also nur noch auf der rechten Hälfte des Intervalls (0,1) verschieben, ohne [11.3] und [11.5] zu verletzen.

4. bis n-ter Schritt: Wir wiederholen das Verfahren des 3. Schritts für die restlichen Alternativen. Bei Einführung jeder zusätzlichen Alternative wird im allgemeinen der Bereich der Verschiebung kleiner, die ohne Verletzung der Relationen [11.3] möglich sind. Das System der Nutzenwerte erstarrt sozusagen. Wenn die Zahl n nur genügend gross wird, erhalten wir auf diese Art unter bestimmten Bedingungen eindeutige Nutzenwerte (bis auf lineare Transformationen) für alle Alternativen.
Es ist bisher noch nicht gelungen, notwendige und hinreichende Bedingungen für dieses "Erstarren" anzugeben, allerdings gibt es zwei wichtige Spezialfälle, wo zumindest hinreichende Bedingungen bekannt sind.

Fall 1: Für zwei Alternativen A_i und A_j existiere stets eine dritte, A_k, deren Nutzen in der Mitte der Nutzenwerte von A_i und A_j liegt (dies bedeutet insbesondere: n ist nicht endlich)

$$u(A_i) - u(A_k) = u(A_k) - u(A_j).$$

Dann ist u bis auf lineare Transformationen eindeutig bestimmt. Beweis und exakte Darstellung finden sich bei SUPPES und WINET (1955).

Fall 2: Zwischen A_1 und A_n existiert eine Reihe von Alternativen A_i, so dass

$$u(A_i) - u(A_{i+1}) = u(A_{i+1}) - u(A_{i+2}) \text{ für } i = 0 \ldots n-3.$$

Es gibt also einen Alternativensatz mit gleichen Differenzen.

Auch in diesem Fall ist n bis auf lineare Transformationen eindeutig festgelegt.
Beweis und exakte Darstellung finden sich in DAVIDSON und SUPPES (1956).

§ 12 Lösungsmodelle und Verhandlungsschemata

Gegeben sei nun ein Drei-Personen-Spiel mit Seitenzahlungen in Form der charakteristischen Funktion. Auf welche der beiden in § 10 angegebenen Arten wir v interpretieren, ist in den Paragraphen 12 und 13 nicht von Bedeutung.
Es ergeben sich insbesondere drei Probleme:

Welche Koalition wird sich bilden ?
Wie wird der Gewinn aufgeteilt ?
Wie sehen die Verhandlungen der drei Spieler aus ?

Dazu einige Definitionen:

Eine Koalitionsstruktur T ist eine Aufteilung der Spielermenge N = {1,2,3} in disjunkte Teilmengen.
(z.B. T = {(1,2),(3)} oder T = {(1,2,3)} oder T = {(1),(2),(3)} .

Eine Aufteilung oder Auszahlung $\vec{x}$ zu einem durch v gegebenen Spiel ist ein Tripel $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ und

$$[12.1] \qquad x_1+x_2+x_3 \leq v_{123} .$$

x_i bedeutet den Anteil am Gewinn, den Spieler i bekommt, und Forderung [12.1] beinhaltet wegen [9.1], dass nicht mehr aufgeteilt werden kann als überhaupt vorhanden ist.

Sei X(v) die Menge aller zu v gehörigen Aufteilungen.

Ein Lösungsmodell L ist eine Abbildung der Menge der charakteristischen Funktionen in die Mengen der zugehörigen Aufteilungen

$$L: \; v \longrightarrow L(v) \subset X(v)$$

Bei vorgegebener charakteristischer Funktion gibt L(v) an, welche

Auszahlungen überhaupt als Einigung in Frage kommen.
Es gibt:

vollständige Lösungsmodelle, die jedem v eine nichtleere Teilmenge aus X(v) zuordnen,

unvollständige Lösungsmodelle, die manchen charakteristischen Funktionen die leere Menge als Lösung zuordnen

und

einelementige Lösungsmodelle, die jedem v genau eine Auszahlung $\vec{x}$ als Lösung zuordnen.

Das Lösungsmodell L_1 impliziert das Lösungsmodell L_2, wenn für jedes v gilt:

$$\vec{x} \in L_1(v) \Rightarrow \vec{x} \in L_2(v), \text{ also } L_2(v) \subseteq L_1(v).$$

Wegen der unbeschränkten Möglichkeiten, aus der Menge aller Auszahlungen X(v) eine Teilmenge als Lösungsmodell herauszugreifen, brauchen wir eine restriktive Forderung an vernünftige Lösungsmodelle. Wir wollen ein Lösungsmodell dann als vernünftig ansehen, wenn eine rationale, d.h. nach bestimmten regulativen Regeln strukturierte Verhandlung zu ihren Auszahlungen führt.

Ein Verhandlungsschema $V = (L', R)$ besteht aus einer Teilmenge $L' \subset X(v)$ und einem System regulativer Regeln $R = (R_1, R_2, \ldots R_m)$, welches jedem Einigungsvorschlag $\vec{x}_i \in X(v) - L'$ einen Vorschlag $\vec{x}_{i+1}$ zuordnet, so dass die Folge der Vorschläge $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ gegen L' konvergiert und dann abbricht, wenn $\vec{x} \in L'$.

(Eine mathematische strenge Formulierung dieser Definition, insbesondere des Konvergenzbegriffs, ist möglich, soll aber hier nicht durchgeführt werden).
Die Regeln sollen dabei, wie in § 5 dargelegt, als Handlungsanweisungen oder Verhandlungspläne für die Spieler verstanden werden.

Ein Lösungsmodell L heisst nun vernünftig, wenn es ein Verhandlungsschema V = (L,R) dazu gibt.

Ein Verhandlungsschema V = (L,R) sei zyklisch genannt, wenn die induzierte Folge von Vorschlägen für manche v-Werte nie abbricht, wenn also

$$L(v) = \emptyset \quad \text{für zumindest ein } v.$$

Zyklische Verhandlungsschemata gehören zu unvollständigen Lösungsmodellen.

Wir wollen ein Verhandlungsschema symmetrisch nennen, wenn es jedem Spieler die gleichen Regeln als Handlungsanweisungen zuordnet.

§ 13 Äquivalenztransformationen

Die meisten Lösungsmodelle beinhalten implizit die Vorstellung, dass die Verhandlungen und Einigungen der Spieler

a) nicht wesentlich von der absoluten Höhe des zu verhandelnden Nutzens abhängen und

b) nicht wesentlich davon abhängen, ob jeder Spieler i vor dem Spiel zusätzlich einen Betrag a_i bekommt oder zahlen muss, dessen Höhe nicht von Verhandlungen und Entscheidungen der Spieler bestimmt wird.

Transformieren wir die charakteristische Funktion v durch einen gemeinsamen positiven Faktor c aller Koalitionsstärken in eine Funktion $v' = c \cdot v$, und ist $\vec{x}$ laut Lösungsmodell L(v) Lösung von v, so ist bei Gültigkeit von Annahme a) $\vec{x}' = c \cdot \vec{x} = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, c \cdot x_3)$ auch Lösung von $L(c \cdot v)$.
Transformieren wir v zu v' mit

$$v'(S) = v(S) + \sum_{i \in S} a_i \quad \text{für alle } S$$

und ist $\vec{x}$ laut Lösungsmodell L(v) Lösung von v, so ist bei Gültigkeit von Annahme b) $\vec{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ mit $x_i' = x_i + a_i$ Lösung von L(v').

Eine Äquivalenztransformation T ist eine Transformation

$$T: v(S) \longrightarrow v'(S) \qquad \text{für alle } S$$

$$T: \vec{x} \longrightarrow \vec{x}' \qquad \text{für alle } \vec{x} \in X(v)$$

der charakteristischen Funktionen und der Auszahlungen mit der Eigenschaft

$$[13.1] \qquad v'(S) = c \cdot (v(S) + \sum_{i \in S} a_i) \;,\; a_i \in \mathbb{R} \;,\; c \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

und

$$[13.2] \qquad x_i' = c \cdot (x_i + a_i).$$

Zwei Spiele v und v' heissen strategisch äquivalent, wenn sie durch eine Äquivalenztransformation auseinander hervorgehen, d.h. wenn es Zahlen c, a_1, a_2 und a_3 gibt, so dass [13.1] erfüllt ist.

Ein Lösungsmodell L (einschliesslich des zugehörigen Verhandlungsschemas V) ist invariant gegen Äquivalenztransformationen, wenn für strategisch äquivalente Spiele v und v' aus $\vec{x} \in L(v)$ stets $\vec{x}' \in L(v')$ folgt und umgekehrt.

Hat man festgestellt, dass eine Lösungstheorie invariant gegen Äquivalenztransformationen ist, so lassen sich die weiteren Überlegungen vereinfachen, indem man die Menge aller charakteristischen Funktionen in disjunkte Teilmengen von strategisch äquivalenten Funktionen aufteilt und nur noch jeweils einen Vertreter dieser Klassen in die Überlegungen einbezieht.
Eine besonders einfache Darstellung der charakteristischen Funktionen erlaubt die spezielle Äquivalenztransformation $T_{-1,0}$, die bestimmt ist durch

$$[13.3] \qquad a_1 = 1/3(v_2 + v_3 - 2v_1 - v_{123})$$

$$a_2 = 1/3(v_1 + v_3 - 2v_2 - v_{123})$$

$$a_3 = 1/3(v_1 + v_2 - 2v_3 - v_{123})$$

und

$$c = \frac{3}{v_{123}-v_1-v_2-v_3}$$

Diese Transformation heisst (-1,0)-Normierung, weil für sie gilt:

[13.4] $\quad v'_i = -1$

und

[13.5] $\quad v'_{123} = 0.$

Aus [13.1]und[13.5]. folgt insbesondere:

$$v'_{123} = 0 = c(v_{123}+a_1+a_2+a_3),$$

also

[13.6] $\quad a_1+a_2+a_3 = -v_{123}.$

Die charakteristischen Funktionen v', die [13.4]und [13.5] genügen, nennen wir Funktionen im reduzierten System.

§ 14 Imputationen und der Kern

Es scheint uns zweckmässig, die Lösungsmodelle in zwei Klassen aufzuteilen, in solche aus Feld 1 und Feld 4 des Schemas [10.3].
In den Paragraphen 14 und 15 wollen wir die einfachsten Theorien aus Feld 1 betrachten, also weder interpersonellen Nutzenvergleich noch intervallskalierte Nutzenfunktionen voraussetzen.

Grundlegend für fast alle Lösungsmodelle sind die folgenden drei Regeln:

R 1 : Jeder Spieler beansprucht mindestens soviel wie er auch schon allein durchsetzen kann.

$$x_i \geq v_i$$

(Regel der individuellen Rationalität)

R 2 : Es bildet sich eine Koalitionsstruktur, durch die der maximal erreichbare Gesamtgewinn aufgeteilt wird, d.h. falls $v_{123} > v_{ij}+v_k$ ist, bildet sich die grosse Koalition, falls $v_{123} = v_{ij}+v_k$ für ein Paar {i,j}, bildet sich die grosse Koalition oder {i,j}.
(Regel der ausschöpfenden Koalitionsstruktur)

R 3 : Jede Koalition S_i aus der Koalitionsstruktur $T = (S_1, S_2 ..)$ teilt ihren Gesamtgewinn auf, d.h.

$$\sum_{j \in S_i} x_j = v_{S_i} \quad \text{für jedes } S_i \in T.$$

(Regel der Koalitionsrationaltität).

Die Regeln R2 und R3 bedingen die "Gruppenrationalität" von $\overset{+}{x}$:

$$x_1+x_2+x_3 = v_{123}$$

Eine Auszahlung $\overset{+}{x} \in X(v)$, die den Forderungen

$$[14.1] \qquad x_i \geq v_i$$

und

$$[14.2] \qquad x_1+x_2+x_3 = v_{123}$$

genügt, heisst Imputation des durch v beschriebenen Spiels.

Sei I(v) die Menge der zu v gehörigen Imputationen.
Lehnt jeder Spieler alle Auszahlungen ab, die eine der Regeln R1, R2 oder R3 verletzen und schlägt er jeweils eine entsprechende Auszahlung vor, so bilden diese Regeln ein Verhandlungsschema $V = (I, R_1, R_2, R_3)$, welches zur Menge der Imputationen führt. Die Menge I(v) stellt also ein vernünftiges Lösungsmodell dar. Wegen der Superadditivität ist $I(v) \neq \emptyset$ für alle v. Ausser in dem trivialen Fall $v_{123} = v_1+v_2+v_3$ ist I(v) aber nicht einelementig. Aus $x_i \geq v_i$ und $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$ folgt

$$x_i' = c(x_i+a_i) \geq c(v_i+a_i) = v_i'$$

und $x_1'+x_2'+x_3' = c(x_1+a_1+x_2+a_2+x_3+a_3) = c(v_{123}+a_1+a_2+a_3) = v_{123}'$.

Damit ist I(v) invariant gegenüber Äquivalenztransformationen.
Wir wollen nun eine geometrische Darstellung der Menge der Imputationen angeben. Die Menge der Auszahlungen beschreibt einen dreidimensionalen Halbraum, der durch die mittels [14.2] beschriebene Ebene begrenzt wird. Die drei Gleichungen [14.1] begrenzen ein Dreieck in dieser Ebene. Jede Imputation $\vec{x}$ lässt sich also als Punkt in einem Dreieck darstellen, wobei die Koordinaten x_i die durch die Projektionen auf die drei im Winkel von 60° zueinander stehenden Koordinatenachsen erzeugten Abschnitte bedeuten (Abb.1). Einfache geometrische Überlegungen zeigen, dass durch diese Konstruktion die Gültigkeit von [14.2] gewährleistet ist.

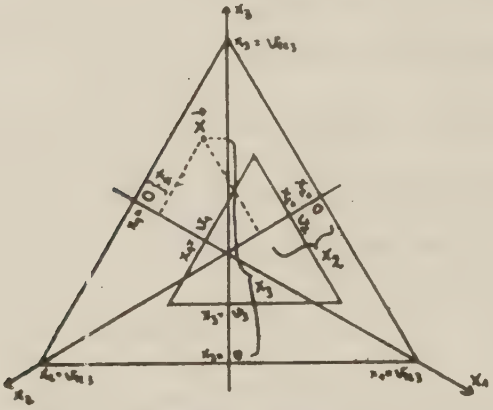


Abb.1 Das Imputationsdreieck

Ein Spiel heisst unwesentlich, wenn

[14.3] $$v_{123} = v_1 + v_2 + v_3$$

gilt, andernfalls heisst es wesentlich.

Der Nachteil der Theorie der Imputation besteht darin, dass es für wesentliche Spiele sehr viele verschiedene Imputationen gibt, also nur schwache Aussagen über die Art der Einigung möglich sind.

Daher suchen wir nach Lösungsmodellen, die aus der Menge der Imputationen einen Teilbereich herausgreifen.

Es liegt nahe, die Idee der individuellen Rationalität auch auf Zweierkoalitionen auszudehnen. Damit ist gemeint: jede Zweierkoalition beansprucht zumindest den Gewinn, den sie auch schon allein durchsetzen kann.

Eine Auszahlung $\vec{x}$ dominiert eine Auszahlung $\vec{y}$ bezüglich der Koalition S (in Zeichen $\vec{x} \succ_S \vec{y}$), wenn

1.) $\vec{x}$ für alle Mitglieder von S mindestens ebenso günstig ist wie $\vec{y}$ und für mindestens ein Mitglied von S günstiger.

$$[14.4] \quad x_i \geq y_i \qquad \text{für alle } i \in S$$

und

$$x_j > v_j \qquad \text{für mindestens ein } j \in S.$$

2.) Die Koalition S ihren Anteil von $\vec{x}$ auch gegen den Willen der nicht zu S gehörigen Spieler durchsetzen kann.

$$[14.5] \quad \sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

$\vec{x}$ dominiert $\vec{y}$, ($\vec{x} \succ \vec{y}$), wenn eine Koalition S existiert, bezüglich der $\vec{x}$ $\vec{y}$ dominiert.

Mit dem Begriff der Dominanz lässt sich eine weitere Regel formulieren:

R 4 : Jeder Spieler lehnt Auszahlungen $\vec{x}$ ab, die dominiert werden von einer Auszahlung $\vec{y}$ bezüglich einer Koalition, zu der er selbst gehört.
Gleichzeitig schlägt er die entsprechenden Auszahlungen $\vec{y}$ vor.

Betrachten wir die Koalitionen S = {1}, {2}, {3}, so werden nach R4 höchstens Auszahlungen mit

$$[14.6] \quad x_1 \geq v_1, \quad x_2 \geq v_2, \quad x_3 \geq v_3 \quad \text{(individuelle Rationalität)}$$

akzeptiert.

Betrachten wir S =(1,2,3,)so ergibt sich, dass nur Auszahlungen mit

$$[14.7] \quad x_1+x_2+x_3 = v_{123} \qquad \text{(Gruppenrationalität)}$$

akzeptiert werden. Neue Bedingungen liefert R4 nur, wenn wir Zweierkoalitionen betrachten. Hier gilt: $\vec{x}$ wird höchstens dann akzeptiert, wenn

$$[14.8] \quad x_1+x_2 \geq v_{12},\ x_1+x_3 \geq v_{13} \text{ und } x_2+x_3 \geq v_{23}$$

gelten.

Der Kern C(v) des durch v beschriebenen Spiels ist die Menge aller Auszahlungen $\vec{x} \in X(v)$, die den Ungleichungen [14.6], [14.7] und [14.8] genügen.

Dass der Kern zusammen mit der Regel R4 ein vernünftiges Lösungsmodell bildet, zeigt folgendes Theorem:

Theorem 2: Der Kern ist die Menge aller nicht dominierten Auszahlungen.

Beweis im Anhang A1.

Theorem 2 gilt auch für n > 3, - siehe Anhang A2.

Wir haben damit im Kern zwar ein vernünftiges Lösungsmodell, welches das Modell der Imputationen impliziert, ein grosser Nachteil besteht aber darin, dass der Kern vieler Spiele leer ist: R4 ist eine zyklische Regel. Dazu ein Beispiel:

$$[14.9] \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0, \qquad v_{12} = v_{13} = v_{23} = 1, \qquad v_{123} = 1 .$$

Hier existieren zu jeder Auszahlung andere Auszahlungen, die diese dominieren. Solange die Spieler dies nicht einsehen, wird die Verhandlung sich im Kreis drehen. Ein konstruiertes Verhandlungsbeispiel mag dies verdeutlichen:

[14.10]	Angebot von Sp.	an Sp.	x_1	x_2	x_3	
	1	2	0.5	0.5	0	
	3	2	0	0.6	0.4	
	1	3	0.5	0	0.5	
	2	3	0	0.4	0.6	
	1	2	0.5	0.5	0	
	3	2	0	0.6	0.4	usw.

Das Kern-Modell gestattet keine Aussagen darüber, wann dieses sich-im-Kreis-drehen abbricht.
Eine wichtige Frage ist die, welche Spiele einen nichtleeren Kern haben.
Sie wird durch das folgende Theorem (TACK 1973) beantwortet:

Theorem 3: Ein durch v gegebenes Drei-Personen-Spiel besitzt genau dann einen nichtleeren Kern, wenn gilt:

$$[14.11] \qquad v_{123} \geq 1/2(v_{12}+v_{13}+v_{23}).$$

Beweis im Anhang A1. Eine Verallgemeinerung von Theorem 3 gilt auch für $n > 3$; siehe Anhang A2.
Zur experimentellen Überprüfung des Kern-Modells ist die Frage interessant, welche Spiele einen einelementigen Kern besitzen.

Theorem 4: (TACK 1973) Ein durch v gegebenes Drei-Personen-Spiel besitzt genau dann einen einelementigen Kern $\vec{c}$, wenn gilt:

$$[14.12] \qquad v_{123} = 1/2(v_{12}+v_{13}+v_{23}).$$

Es gilt ferner:

$$[14.13] \qquad c_1 = 1/2(v_{12}+v_{13}-v_{23})$$
$$c_2 = 1/2(v_{12}+v_{23}-v_{13})$$
$$c_3 = 1/2(v_{13}+v_{23}-v_{12}).$$

Beweis im Anhang A1.
Wie man leicht sieht, ist der Kern invariant gegen Äquivalenztransformationen.
Der Kern lässt sich geometrisch als Schnittfläche der durch

$$[14.14] \qquad x_1 = v_1,\ x_2 = v_2,\ x_3 = v_3$$

und

$$x_1+x_2 = v_{12},\quad x_1+x_3 = v_{13},\quad x_2+x_3 = v_{23}$$

also

$$[14.5] \qquad x_3 = v_{123}-x_1-x_2 = v_{123}-v_{12},\quad x_2 = v_{123}-v_{13},\quad x_1 = v_{123}-v_{23}$$

begrenzten Dreiecke. (Abb. 2)

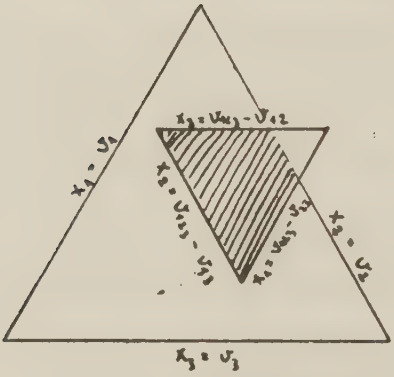


Abb. 2 Die geometrische Darstellung des Kerns (schraffierte Fläche)

Die drei Linien [13.15] bilden bei Spielen mit nichtleerem Kern stets ein Dreieck, welches auf der Spitze steht, während sie bei Spielen mit leerem Kern ein auf der Grundseite stehendes Dreieck bilden. (Abb. 3)

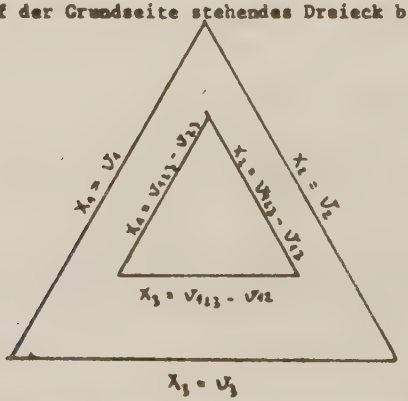


Abb. 3 Die Imputationen für Spiele mit leerem Kern.

Konstantsummenspiele sind Spiele, in denen sich die Bildung einer Dreierkoalition nicht lohnt, d.h. für die gilt:

$$[14.16] \qquad v_{123} = v_{12}+v_3 = v_{13}+v_2 = v_{23}+v_1.$$

Diese Definition entspricht der allgemeineren:

In Konstantsummenspielen wird der Gesamtwert v(N) immer dann schon erreicht, wenn die Spieler sich in zwei Koalitionen S und N-S aufteilen.

$$v(S) + v(N-S) = v(N) \qquad \text{für alle S.}$$

(siehe LUCE-RAIFFA 1957, S. 183)

Jede Koalitionsstruktur, die eine Zweierkoalition enthält, ist in Konstantsummenspielen schon ausschöpfend. Wegen [14.16] gilt hier:

$$v_{12}+v_{13}+v_{23} = v_{123}-v_1-v_2-v_3.$$

Mit [9.1] folgt daraus: wesentliche Konstantsummenspiele haben einen leeren Kern.

In Konstantsummenspielen fällt das Dreieck A' B' C' (Abb. 3) mit dem Imputationsdreieck zusammen.
Am Beispiel [14.9] und [14.10] wird klar, dass Konstantsummenspiele ein starkes Konfliktpotential beinhalten: jeder Spieler versucht, eine stabile Zweierkoalition einzugehen und einen dritten Spieler auszuschliessen.
Für Spiele mit leerem Kern lässt sich eine weitere Menge angeben.

$$Z(v) = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in I(v);\ x_i+x_j \leq v_{ij}\}.$$

Z(v) enthält die Imputationen $\vec{x}$, die schon von jedem Paar von Spielern abgelehnt werden können, weil diese zu zweit schon mindestens genau soviel gewinnen können wie ihnen durch $\vec{x}$ zugestanden wird. Daher wird eine Einigung aller drei Spieler um so schwieriger erreichbar sein, je grösser die Teilmenge Z(v) der Imputationen ist. Einige Eigenschaften der Menge Z(v) gibt Theorem 5 wieder.

Theorem 5: a) Für Konstantsummenspiele gilt:

$$Z(v) = I(v)$$

b) Für Spiele mit einelementigem Kern gilt:

$$Z(v) = C(v)$$

c) Für alle Spiele mit nichteinelementigem Kern gilt:

entweder $Z(v) = \emptyset$ und $C(v) \neq \emptyset$
oder $C(v) = \emptyset$ und $Z(v) \neq \emptyset$.

Beweis in Anhang A1.

Wenn das durch Regel R4 definierte Verhandlungsschema im deskriptiven Sinn brauchbar ist, wird die Verhandlungsstruktur wesentlich davon abhängen, ob der Kern eines Spieles leer ist oder nicht; bei leerem Kern wird sie weiterhin davon abhängen, welcher Anteil der Imputationen in Z(v) liegt und bei nichtleerem Kern entsprechend davon, welcher Anteil der Imputationen im Kern liegt. Es liegt daher nahe, ein Konfliktmass m(v) zu entwickeln, welches diese Fragen quantitativ beantwortet.

Sei v eine charakteristische Funktion, für die mindestens ein Paar von Koalitionen A, B mit $A \cap B = \emptyset$ und $v(A \cup B) > v(A)+v(B)$ existiert.

Sei weiterhin

$$h_1 = v_{12}+v_{13}-v_{123}-v_1$$

$$h_2 = v_{12}+v_{23}-v_{123}-v_2$$

$$h_3 = v_{13}+v_{23}-v_{123}-v_3$$

und J die Menge der Indizes mit $h_i < 0$.

Das Konfliktmass m(v) des durch v beschriebenen Spiels wird nun nach folgender Formel berechnet:

$$m(v) = \frac{3(v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123}-\sum_{i \in J} h_i)}{3(v_{123}-v_1-v_2-v_3)}$$

Theorem 6 zeigt, dass m(v) einige Eigenschaften besitzt, die eine Interpretation als Konfliktmass sinnvoll erscheinen lassen.

Theorem 6: a) Es gilt

$$-1 \leq m(v) \leq +1 \quad \text{für alle } v.$$

b) Für Konstantsummenspiele gilt

$$m(v) = +1,$$

für Spiele mit einelementigem Kern gilt

$$m(v) = 0,$$

für Spiele, in denen jede Imputation zum Kern gehört, gilt

$$m(v) = -1.$$

c) Für Spiele mit leerem Kern gilt

$$0 < m(v) \leq 1,$$

für Spiele mit nichtleerem Kern gilt

$$-1 \leq m(v) \leq 0.$$

d) Seien zwei Spiele v und v' mit

$$[14.18] \quad v_i = v'_i$$

und

$$[14.19] \quad v_{123} = v_{123}'$$

gegeben. (Zu zwei beliebigen Spielen gibt es stets strategisch äquivalente Spiele, die [14.18] und [14.19] erfüllen),

Dann gilt

d_1) Aus $\emptyset \neq C(v) \subset C(v')$ folgt $m(v) > m(v')$,
d.h. je kleiner der Kern, um so grösser das Konfliktmass bei gleicher Imputationsmenge.

d_2) Aus $\emptyset \neq Z(v) \subset Z(v')$ folgt $m(v) < m(v')$,
d.h. je grösser die Menge Z(v), um so grösser das Konfliktmass bei gleicher Imputationsmenge.

e) Für strategisch äquivalente Spiele v und v' gilt

$$m(v) = m(v').$$

Beweis in Anhang A1.

Wie wir in Theorem 3 gesehen haben, liefert das Kern-Modell für eine grosse Klasse von Spielen keine Lösung. Ein etwas differenzierteres Lösungs- und Verhandlungsmodell, welches auch für Spiele mit leerem Kern Aussagen gestattet, wollen wir im nächsten Paragraphen vorstellen.

§ 15 Der Bargaining Set

Betrachten wir wieder das Beispiel

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0,\ v_{12} = v_{13} = v_{23} = v_{123} = 1.$$

Es sei nun $\vec{x} = (0.5\ \ 0.5\ \ 0)$ ein Vorschlag von Spieler 1 an Spieler 2. Spieler 2 kann hier gegen Spieler 1 einen Einwand mit folgendem Argument vorbringen:

"Ich finde, Du verlangst zuviel, denn wenn ich (Sp. 2) mit Spieler 3 zusammenarbeite, kann jeder von uns beiden (Sp. 2 und Sp. 3) mehr bekommen, z.B.

$$y_2 = 0.7, \quad y_3 = 0.3."$$

Gegen dieses Argument hat der Spieler 1 aber einen Gegeneinwand:

"Deine Drohung, mit Spieler 3 zusammenzuarbeiten, kann ich (Sp.1) erwidern. Ich könnte ihm mehr bieten als Du, z.B.

$$z_3 = 0.4 > 0.3 = y_3$$

und selbst noch mehr für mich behalten als ich im ersten Vorschlag an Dich für mich beansprucht habe:

$$z_1 = 0.6 > 0.5 = x_1."$$

Gegen den erstgenannten Vorschlag $\vec{x}$ kann allerdings auch Spieler 3 einen Einwand vorbringen, etwa mit dem Angebot an Spieler 2:

$$y_2 = 0.9,\ y_3 = 0.1.$$

Dagegen hat Spieler 1, gegen den der Einwand gerichtet ist, kein Gegenargument zur Verfügung, denn es ist ihm nicht möglich, Spieler 2 mehr als 0.9 anzubieten und selbst noch mehr als 0.5 zu behalten.
Für manche Einwände gibt es also Gegeneinwände, für andere nicht.
Die im Bargaining Set Modell formalisierte Idee lautet nun:
Eine Auszahlung gehört nur dann zur Lösung, wenn sich jeder Einwand dagegen durch einen Gegeneinwand zurückweisen lässt. Zur mathematischen Beschreibung benötigen wir einige Definitionen.

Ein Einwand eines Spielers i gegen einen Spieler j bezüglich der Imputation $\vec{x}$ ist ein Paar $(\vec{y},C)$, wo C eine Koalition ist, die Spieler i, nicht aber Spieler j enthält, und $\vec{y}$ ein Vektor, dessen Indizes die Mitglieder von C sind und für den

$$y(C) = \sum_{l \in C} y_l = v(C)$$

und

$$y_k > x_k \qquad \text{für alle } k \in C$$

gilt.

Ein Gegeneinwand zu dem eben genannten Einwand $(\vec{y},C)$ ist ein Paar $(\vec{z},D)$, wobei D eine Koalition darstellt, die Spieler j, nicht aber Spieler i enthält und $\vec{z}$ einen Vektor, dessen Indizes die Mitglieder von D sind und für den gilt:

$$z(D) = \sum_{i \in D} z_i = v(D)$$

und

$$z_k \geq y_k \qquad \text{für alle } k \in D \cap C,$$

$$z_k \geq x_k \qquad \text{für alle } k \in D - C.$$

Ein Einwand ist gerechtfertigt, wenn zu ihm kein Gegeneinwand existiert.

Eine Auszahlung $\vec{x}$ gehört genau dann zum Bargaining Set (M(S)) für die Koalition S, wenn keinem Mitglied von S ein gerechtfertigter Einwand gegen $\vec{x}$ möglich ist.

Das zum Bargaining Set Modell gehörige Verhandlungsschema lautet:
Sei eine Auszahlung $\vec{x}$ als Vorschlag gegeben.

R 5: Wenn möglich, erheben die Mitglieder von S Einwände dagegen.

R 6: Jeder ungerechtfertigte Einwand wird abgelehnt, jeder gerechtfertigte als neuer Vorschlag übernommen.

Regel R5 ist eine Neuformulierung von Regel R4.
Das Bargaining Set Modell liefert keine Aussagen über die sich bildende Koalitionsstruktur, sondern nur über die Aufteilung innerhalb einer Koalition unter der Annahme, dass gerade die sich bildet.

Der Zusammenhang mit den bisher vorgestellten Lösungsmodellen ergibt sich aus den Theoremen 7 und 8.

Theorem 7: a) Für Drei-Personen-Spiele mit nichtleerem Kern ist der Bargaining Set für die grosse Koalition gleich dem Kern

$$[15.1] \qquad M(1,2,3) = C(v).$$

b) Für Drei-Personen-Spiele mit leerem Kern enthält der Bargaining Set für die grosse Koalition nur die Auszahlung $\vec{b}$ mit

$$[15.2] \qquad \begin{aligned} b_1 &= 1/3(v_{123}+v_{12}+v_{13}-2v_{23}) \\ b_2 &= 1/3(v_{123}+v_{12}+v_{23}-2v_{13}) \\ b_3 &= 1/3(v_{123}+v_{13}+v_{23}-2v_{12}). \end{aligned}$$

Beweis im Anhang A1.

Theorem 8: Zur Berechnung des Bargaining Set für die Zweierkoalition unterscheiden wir zwei Fälle:
Fall a: Gilt für die Koalition {1,2}

$$[15.3] \qquad v_{12} \geq v_{13}+v_{23}-2v_3,$$

so ist

$$[15.4] \quad M(1,2) = \{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2 = v_{12},\ v_{12}-v_{23}+v_3 \geq x_1 \geq v_{13}-v_3\}$$

$$[15.5] \quad M(1,3) = \{\tfrac{1}{2}\cdot(v_{12}+v_{13}-v_{23}),\ \tfrac{1}{2}\cdot(v_{13}+v_{23}-v_{12})\}$$

$$[15.6] \quad M(2,3) = \{\tfrac{1}{2}\cdot(v_{12}+v_{23}-v_{13}),\ \tfrac{1}{2}\cdot(v_{13}+v_{23}-v_{12})\}.$$

Entsprechende Formeln gelten für die Permutationen von (1,2,3).

Fall b: Gilt für alle Koalitionen {i,j}

$$[15.7] \quad v_{ij} < v_{ik}+v_{jk}-2v_k,$$

so ist

$$[15.8] \quad M(i,j) = \{\tfrac{1}{2}\cdot(v_{ij}+v_{ik}-v_{jk}),\ \tfrac{1}{2}\cdot(v_{ij}+v_{jk}-v_{ik})\}.$$

Diese Fallunterscheidung ist vollständig.

Beweis von Theorem 8 im Anhang A1.

Aus den Theoremen 7 und 8 schliesst man leicht die Invarianz des Bargaining Set gegen Äquivalenztransformationen.
Das Bargaining Set Modell liefert nach diesen Theoremen zusammen mit dem Verhandlungsschema V = (M,R4, R5) eine vollständige und vernünftige, aber nicht einelementige Lösungstheorie.
Da mit Hilfe des Bargaining Set Modells keine Aussagen darüber möglich sind, welche Koalition sich bildet, liegt es nahe, dieses Modell durch Hypothesen über die Koalitionsbildung zu ergänzen. Wir können etwa jeder Koalition $S_1 \ldots\ldots S_7$ eine Auftretenswahrscheinlichkeit $p(S_i,v)$ zuordnen. Wenden wir Regel R2 (Regel der ausschöpfenden Koalitionsstruktur) an, so erhalten wir:

$p(S_i,v) = 0$ für alle S_i aus nichtausschöpfenden Koalitionsstrukturen.

Es gibt bisher keine ausgearbeitete Theorie der Koalitionsbildung, sondern nur einige einfache Hypothesen, die wir im experimentellen Teil (Kapitel 3) darstellen wollen.

§ 16 Gleichverteilungen und Nucleolus

Einelementige Lösungsmodelle erhält man erst, wenn man die Möglichkeit des interpersonellen Nutzenvergleichs in die Betrachtungen einbezieht.

Das einfachste Lösungsmodell ist das der Gleichverteilung (Gl): der maximale Gesamtgewinn wird in drei gleiche Teile aufgeteilt: $Gl = \{\vec{g}\}$ mit

$$[16.1] \qquad g_1 = g_2 = g_3 = \frac{1}{3} \cdot v_{123}.$$

Die Gleichverteilung ist nicht invariant gegen Äquivalenztransformationen und kann zu Widersprüchen zur individuellen Rationalität führen. Betrachten wir z.B. das Spiel:

$$[16.2] \qquad v_1 = 1 \quad v_2 = 1 \quad v_3 = 5$$

$$v_{12} = 5 \quad v_{13} = 7 \quad v_{23} = 7$$

$$v_{123} = 10$$

Die Gleichverteilung Gl bezeichnet die Auszahlung $\vec{g} = (3.33, 3.33, 3.33)$ Wegen $g_3 = 3.33 < 5 = v_3$ verletzt $\vec{g}$ die Regel der individuellen Rationalität.

Gl wird als Lösungsmodell in solchen Spielen höchstens dann in Frage kommen, wenn jemand freiwillig auf seinen Anteil verzichtet oder die Situation nicht durchschaut.

Zwei weitere Lösungsmodelle basieren auf einem neuen Begriff:

Der Exzess $e_S(\vec{x})$ einer Koalition S bezüglich einer Auszahlung $\vec{x}$ ist definiert durch

$$[16.3] \qquad e_S(\vec{x}) = v(s) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Ein positiver Exzess bedeutet, dass die Koalition S mehr durchsetzen kann als ihr durch $\vec{x}$ zugestanden wird. Der Exzess liefert hier also ein Mass für den Protest der Koalition S gegen $\vec{x}$.

Ist $e_S(\vec{x})$ negativ, so bekommt die Koalition S schon mehr als sie durchsetzen kann. $e_S(\vec{x})$ misst hier die Unzufriedenheit von S bezüglich $\vec{x}$: je kleiner

$e_S(\vec{x})$ ist, um so zufriedener wird Koalition S bezüglich $\vec{x}$ sein.
Ist eine Auszahlung $\vec{x}$ gegeben, so gibt es dazu drei Exzesse für die einzelnen Spieler.

$$[16.4] \qquad e_1(\vec{x}) = v_1 - x_1$$
$$e_2(\vec{x}) = v_2 - x_2$$
$$e_3(\vec{x}) = v_3 - x_3 \ .$$

Falls jeder Spieler eine Optimierung des eigenen Nutzens anstrebt, versucht er, seinen Exzess zu verkleinern. Nehmen wir nun an, dass die Spieler sich dahingehend einigen, dass auch der grösste der drei Exzesse [16.4] möglichst klein wird, so führt dies zu der Auszahlung $\vec{r}$ mit

$$[16.5] \qquad r_1 = v_1 + 1/3(v_{123} - v_1 - v_2 - v_3)$$
$$r_2 = v_2 + 1/3(v_{123} - v_1 - v_2 - v_3)$$
$$r_3 = v_3 + 1/3(v_{123} - v_1 - v_2 - v_3).$$

Wir wollen $\vec{r}$ die "Gleichaufteilung des Restes" nennen, da diese Aufteilung jedem Spieler seinen durchsetzbaren Anteil v_i zuteilt und der darüber hinaus erreichbare Gesamtgewinn, nämlich $v_{123} - v_1 - v_2 - v_3$, gleichmässig unter die Spieler verteilt wird.
$\vec{r}$ liefert ein Lösungsmodell GAR zu folgendem Verhandlungsschema V = (GAR,R7):

R 7: Jeder Spieler vergleicht seinen Exzess mit den Exzessen der beiden anderen Spieler. Gilt

$$e_i(\vec{x}) > e_j(\vec{x}) \quad \text{oder} \quad e_i(\vec{x}) > e_k(\vec{x}),$$

so schlägt Spieler i eine neue Auszahlung vor, die seinen Exzess verkleinert. Dabei beachtet er allerdings, dass die Exzesse der beiden anderen Spieler nicht grösser werden als sein eigener.

Während Modell G1 von einer absoluten, d.h. situationunabhängigen Gerechtigkeit ausging, wird im Modell GAR die Gerechtigkeit relativiert: Der Gewinn eines Spielers wird zum Teil bestimmt durch seine Ausgangsposition im Spiel v_i.

Modell GAR ist vollständig, einelementig, vernünftig und invariant gegen Äquivalenztransformationen, widerspricht aber unter Umständen der Regel der Koalitionsrationalität, d.h. $\vec{r}$ liegt auch bei Spielen mit nichtleerem Kern nicht notwendigerweise im Kern. Betrachten wir dazu wieder Beispiel [16.2]:

Wegen $v_{12}+v_{13}+v_{23} = 19 < 2v_{123} = 20$ ist der Kern dieses Spiels nicht leer. Es gilt

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 6$$

und damit $r_1+r_2 = 4 < v_{12} = 5$, $\vec{r}$ liegt nicht im Kern von v.

Es ist nicht anzunehmen, dass Spieler 1 und 2 in diesem Spiel der Aufteilung $\vec{r}$ zustimmen; insofern ist Modell GAR nicht sehr plausibel. Zur Lösung dieses Problems bietet es sich an, nicht nur die Exzesse der Einzelspieler, sondern die Protestmöglichkeiten auch der Zweierkoalitionen zu beachten und die Auszahlung zu suchen, die den grössten aller 7 möglichen Exzesse minimiert. Wir ersetzen Regel R7 durch

R 8: Sei S eine beliebige Koalition und $\vec{x}$ eine Auszahlung. Jede Koalition $S' \subseteq S$ vergleicht ihren Exzess $e_{s'}(\vec{x})$ mit den Exzessen der übrigen Koalitionen aus S. Ist $e_{s'}(\vec{x})$ grösser als alle anderen Exzesse aus S, so schlägt Koalition S' eine neue, von S durchsetzbare Auszahlung vor, die ihren Exzess verkleinert. Dabei beachtet sie allerdings, dass die übrigen Exzesse nicht grösser werden als ihr eigener. Legt diese Regel die Auszahlung $\vec{x}$ noch nicht eindeutig fest, so wird sie für die nächstgrössten Exzesse erneut angewendet: d.h. zuerst wird der grösste Exzess minimiert, unter dieser Nebenbedingung der zweitgrösste usw..

Dieses Verfahren konvergiert gegen den Nucleolus $N_s(v)$ für die Koalition S.

Eine formale Definition des Nucleolus folgt.

Es sei eine Koalition $S \subseteq \{1,2,3\}$ gegeben. Wir betrachten nun alle Koalitionen S_i mit $S_i \subseteq S$ $i = 1,2,\ldots$. Ordnen wir die Exzesse dieser Koalitionen zu einer festen Auszahlung $\vec{x}$ in eine abfallende Reihe, so erhalten wir die Funktion

$$\theta_s(\vec{x}) = (e_{s_1}(\vec{x}), e_{s_2}(\vec{x}), \ldots\ldots)$$

mit

$$e_{s_{i+1}}(\vec{x}) \leq e_{s_i}(\vec{x}) \qquad i = 1,2, \ldots$$

Der heftigste Protest steht also an erster Stelle, der zweitheftigste an zweiter Stelle usw..

Eine lexikographische Ordnung $\leq_L$ ist eine Ordnungsrelation zwischen zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ die wie folgt definiert ist:

Es gilt $\vec{x} \leq_L \vec{y}$ genau dann, wenn

$x_1 < y_1$
oder $(x_1 = y_1$ und $x_2 < y_2)$
oder $(x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$ und $x_3 < y_3)$
oder .....
..... oder
$(x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$ und $\ldots\ldots x_i = y_i$ und $\ldots x_n = y_n)$.

Es gilt $\vec{x} > \vec{y}$ genau dann, wenn nicht gilt $\vec{x} \leq \vec{y}$.

Der Vektor $\vec{x} = (x_1 .. x_i ..)$ mit $i \in S$ und $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$ liegt genau dann im Nucleolus N(S) des durch v beschriebenen Spiels, wenn für jeden Vektor $y = (y_1 .. y_i ..)$ mit $i \in S$ und $\sum_{i \in S} y_i = v(S)$ gilt:

$$\theta_s(\vec{x}) \leq_L \theta_s(\vec{y}).$$

Das Nucleolus-Modell in dieser Form liefert keine Voraussagen darüber, welche Koalition sich bildet, sondern (genau wie der Bargaining Set) nur darüber, welche Aufteilung unter der Bedingung der Bildung von Koalition S zustandekommt.

Zur Berechnung des Nucleolus:

Trivial ist der Fall S = {i}. Hier bekommt jeder Spieler seinen Einzelgewinn $x_i = v_i$.

Die Zweierkoalition behandelt

Theorem 9: Für Zweierkoalition gilt:

[16.6] $$N(i,j) = \left\{ v_i + 1/2\ (v_{ij} - v_i - v_j),\ v_j + 1/2\ (v_{ij} - v_i - v_j) \right\}.$$

Beweis im Anhang A1.

Der unter dem Aspekt ausschöpfender Koalitionsstrukturen interessanteste Fall ist der der grossen Koalition. Hier wird die Berechnung des Nucleolus möglich.

Theorem 10:

Fall 1: Gilt

[16.7] $$v_{12} + v_{13} + v_{23} \geq 2v_{123},$$

so ist $\overset{+}{n} = \overset{+}{n}_1 = (n_{11}, n_{12}, n_{13})$ mit

[16.8] $$n_{11} = 1/3\ (v_{123} + v_{12} + v_{13} - 2v_{23})$$

$$n_{12} = 1/3\ (v_{123} + v_{12} + v_{23} - 2v_{13})$$

$$n_{13} = 1/3\ (v_{123} + v_{13} + v_{23} - 2v_{12}).$$

Fall 2: Gilt

[16.9] $$v_{12} + v_{13} + v_{23} < 2v_{123},$$

so berechnet man zunächst die Hilfsgrössen

[16.10] $$s_1 = v_{123} + v_1 - v_{12} - v_{13}$$

$$s_2 = v_{123} + v_2 - v_{12} - v_{23}$$

$$s_3 = v_{123} + v_3 - v_{13} - v_{23}$$

und

[16.11] $$h = 2v_{123} - v_{12} - v_{13} - v_{23}.$$

Wir unterscheiden nun 4 Hauptfälle:

Fall 2.1: Wenn

[16.12] $$s_1 > h/3,\ s_2 > h/3,\ s_3 > h/3$$

ist, treffen wir zwei weitere Unterscheidungen:

Fall 2.11: Falls

[16.13] $l_{12} := v_{123} - 3v_{12} + 2v_1 + 2v_2 - v_3 > 0$

[16.14] $l_{13} := v_{123} - 3v_{13} + 2v_1 + 2v_3 - v_2 > 0$

[16.15] $l_{23} := v_{123} - 3v_{23} + 2v_2 + 2v_3 - v_1 > 0$

sind, so ist $\vec{n} = \vec{n}_2 = (n_{21}, n_{22}, n_{23})$ mit

[16.16]
$$n_{21} = 1/3(v_{123} + 2v_1 - v_2 - v_3)$$
$$n_{22} = 1/3(v_{123} + 2v_2 - v_1 - v3)$$
$$n_{23} = 1/3(v_{123} + 2v_3 - v_1 - v_2).$$

Fall 2.12: Falls

[16.17] $l_{12} \leq 0, \quad l_{13} \geq 0, \quad l_{23} \geq 0$

sind, so ist $\vec{n} = \vec{n} = (n_{31}, n_{32}, n_{33})$ mit

[16.18]
$$n_{31} = 1/4(v_{123} + v_{12} + 2v_1 - 2v_2 - v_3)$$
$$n_{32} = 1/4(v_{123} + v_{12} - 2v_1 + 2v_2 - v_3)$$
$$n_{33} = v_{123} - n_{31} - n_{32}.$$

Die Fälle

$$l_{12} \geq 0, \quad l_{13} \leq 0, \quad l_{23} \geq 0$$

und

$$l_{12} \geq 0, \quad l_{13} \geq 0, \quad l_{23} \leq 0$$

lassen sich durch Indexpermutation auf Fall 2.12 zurückführen.

Fall 2.2: Wenn

[16.19] $s_1 \leq h/3, \quad s_2 \leq h/3, \quad s_3 \leq h/3$

gilt, ist $\vec{n} = \vec{n}_1$. (siehe [16.8]).

Fall 2.3: Wenn

[16.20] $s_1 < h/3, \quad s_2 \geq h/3, \quad s_3 \geq h/3$

oder

[16.21] $s_1 \geq h/3, \quad s_2 < h/3, \quad s_3 \geq h/3$

oder

[16.22] $s_1 \geq h/3, \quad s_2 \geq h/3, \quad s_3 < h/3$

gilt, führe man , falls [16.21] oder [16.22] zutrifft, zunächst eine Indexpermutation so durch, dass [16.20] erfüllt ist. Weiter berechne man die Hilfsgrössen

[16.23] $s_{13} = v_{13} - v_1 - v_3$

und

[16.24] $s_{12} = v_{12} - v_1 - v_2$.

Fall 2.31: Gilt nun

[16.25] $s_1 < s_{13}, \quad s_1 < s_{12}$

so ist $\vec{n} = \vec{n}_4 = (n_{41}, n_{42}, n_{43})$ mit

[16.26] $n_{41} = 1/2 \cdot (v_{12} + v_{13} - v_2 - v_3)$

$n_{42} = 1/2(v_{123} - v_{13} + v_2)$

$n_{43} = 1/2(v_{123} - v_{12} + v_3)$.

Fall 2.32: Gilt

[16.27] $s_1 > s_{13}, \quad s_1 < s_{12}$

so ist $\vec{n} = \vec{n}_3$. (siehe 2.12).

Fall 2.33: Gilt

[16.28] $s_1 \leq s_{13}, \quad s_1 \geq s_{12}$

so ist $\vec{n} = \vec{n}_5 = (n_{51}, n_{52}, n_{53})$ mit

[16.29] $n_{51} = 1/4(v_{123} + v_{13} + 2v_1 - 2v_3 - v_2)$

$n_{52} = 1/2(v_{123} - v_{13} + v_2)$

$n_{53} = 1/4(v_{123} + v_{13} - 2v_1 + 2v_3 - v_2)$.

Fall 2.34: Gilt

[16.30] $s_1 \geq s_{13}$, $s_2 \geq s_{12}$

so ist eine der Voraussetzungen von Fall 2.11 oder 2.12 erfüllt und der Nucleolus wird nach den dort angegebenen Gleichungen berechnet.

Fall 2.4: Wenn

[16.31] $s_1 < h/3$, $s_2 < h/3$, $s_3 \geq h/3$

oder

[16.32] $s_1 < h/3$, $s_2 \geq h/3$, $s_3 < h/3$

oder

[16.33] $s_1 \geq h/3$, $s_2 < h/3$, $s_3 < h/3$

ist, führe man, falls [16.32] oder [16.33] zutrifft, zunächst eine Indexpermutation so durch, dass [16.31] erfüllt ist. Weiter berechne man die Hilfsgrössen

[16.34] $s_{13} = v_{13} - v_1 - v_3$

und

[16.35] $s_{23} = v_{23} - v_2 - v_3$.

Fall 2.41: Gilt nun

[16.36] $s_1 < s_{13}$, $s_2 < s_{23}$

so ist $\vec{n} = \vec{n}_6 = (n_{61}, n_{62}, n_{63})$ mit

[16.37] $n_{61} = 1/4(v_{123} + v_{12} - v_3) + 1/2(v_{13} - v_{23})$

$n_{62} = 1/4(v_{123} + v_{12} - v_3) - 1/2(v_{13} - v_{23})$

$n_{63} = 1/2(v_{123} - v_{12} + v_3)$.

Fall 2.42: Gilt

[16.38] $s_1 \leq s_{13}$, $s_2 \geq s_{23}$

so ist $\vec{n} = \vec{n}_4$. (siehe [16.26]).

Fall 2.43: Gilt

[16.39] $s_1 \geq s_{13}$, $s_3 \leq s_{23}$

so vertausche man die Indizes 1 und 2 und führe ihn so auf Fall 2.42 zurück.

Fall 2.44: Gilt

[16.40] $s_1 \geq s_{13}$, $s_2 \geq s_{23}$

so ist $\vec{n} = \vec{n}_2$. (siehe [16.16]).

Beweis im Anhang A1

Im Beweis von Theorem 10 wird auch die Invarianz des Nucleolus gegen Äquivalenztransformationen gezeigt.
Das Nucleolus-Modell liefert also, genau wie das Bargaining Set Modell, für jede Koalitionsstruktur genau eine Auszahlung. Ein Vergleich der Theoreme 7, 8, 9 und 10 zeigt, dass für eine feste Koalitionsstruktur und für jede charakteristische Funktion der Nucleolus im entsprechenden Bargaining Set liegt. Unter der Bedingung einer bestimmten Koalitionsstruktur liefert das Nucleolus-Modell damit ein vernünftiges und eindeutiges Lösungsmodell, welches die Modelle des Bargaining Set, des Kerns (falls nicht leer) und der Imputationen impliziert.

§ 17 Vergleich zwischen Bargaining Set, Nucleolus und Gleichaufteilung des Restes (GAR)

Aus den beiden vorigen Paragraphen ergeben sich folgende Vergleichsmöglichkeiten zwischen den drei Modellen:

Falls sich die grosse Koalition bildet, sind Nucleolus und Bargaining Set allein durch Analyse der Aufteilungen experimentell nicht unterscheidbar, wohl aber die beiden von GAR, denn hier gilt:

a) für Spiele mit leerem Kern:

$$N(1,2,3) = M(1,2,3),$$

aber im allgemeinen

$$N(1,2,3) \neq \vec{r} = GAR$$

b) für Spiele mit nichtleerem Kern:

$$N(1,2,3) \subseteq M(1,2,3) = C(v)$$

aber im allgemeinen

$$N(1,2,3) \neq \vec{r} = GAR$$

und möglicherweise sogar

$$\vec{r} \notin C(v).$$

Falls sich die Koalition (i,j) bildet, fallen Nucleolus und GAR zusammen, sind aber im allgemeinen verschieden vom Bargaining Set.

$$\vec{r}_{ij} = N(i,j) \neq M(i,j).$$

Hier bietet sich also die Möglichkeit des experimentellen Tests von Bargaining Set gegen Nucleolus bzw. GAR.

Ein bemerkenswerte Unterschied zwischen Nucleolus und Bargaining Set zeigt sich bei der Gewinnaufteilung der Koalition (i,j):
Mit $N(i,j) = (n_i, n_j)$ gilt

$$n_i = v_i + 1/2(v_{ij} - v_i - v_j)$$
$$n_j = v_j + 1/2(v_{ij} - v_i - v_j)$$

mit $M(i,j) = (b_i, b_j)$ gilt:

$$b_i = 1/2(v_{ij} + v_{ik} - v_{jk})$$
$$b_j = 1/2(v_{ij} + v_{jk} - v_{ik}).$$

Nach dem Nucleolus-Modell ist also die Gewinnaufteilung in (i,j) unabhängig von den möglichen Gewinnen anderer Koalitionen; Koalitionsbildung und Gewinnaufteilung werden als getrennte Prozesse angesehen. Im Bargaining Set

Modell dagegen ist die Gewinnaufteilung abhängig von der Stärke aller Zweierkoalitionen.

§ 18 Gleichaufteilungskern

Ein Lösungsmodell, welches interpersonellen Nutzenvergleich voraussetzt und für die meisten Spiele einen weitaus grösseren Lösungsbereich zulässt als die bisher behandelten Lösungsmodelle mit interpersonellem Nutzenvergleich, beschreibt SELTEN (1972).

Er geht von der Beobachtung aus, dass die erste Gewinnaufteilung, die von den Mitgliedern einer Koalition vorgeschlagen wird, meist die Gleichaufteilung des Gewinns innerhalb dieser Koalition ist.

Dementsprechend definiert er:

> Eine Auszahlung $\vec{x}$ liegt genau dann im Gleichaufteilungskern GK(v) eines durch v beschriebenen Spiels, wenn keine Koalition ihren Gewinn in gleiche Teile aufteilen kann und dabei jedes ihrer Mitglieder mehr bekommt als durch $\vec{x}$.

Unter Berücksichtigung der Einerkoalition gilt:

$$x_i \geq v_i \quad \text{für} \quad \vec{x} \in GK(v).$$

Die grosse Koalition fordert:

$$[18.1] \quad x_1 \geq 1/3\, v_{123} \text{ oder } x_2 \geq 1/3\, v_{123} \text{ oder } x_3 \geq 1/3\, v_{123}.$$

Dies ist z.B. gewährleistet für alle $\vec{x}$ mit $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$.

Berücksichtigung der Zweierkoalition ergibt:

$$[18.2] \quad \{x_1 \geq 1/2\, v_{12} \text{ oder } x_2 \geq 1/2\, v_{12} \}$$
$$\text{und} \quad \{x_1 \geq 1/2\, v_{13} \text{ oder } x_3 \geq 1/2\, v_{13} \}$$
$$\text{und} \quad \{x_2 \geq 1/2\, v_{23} \text{ oder } x_3 \geq 1/2\, v_{23}\}.$$

Eigenschaften des Gleichverteilungskerns beschreibt

Theorem 11:

a) $GK(v) \neq \emptyset$ für alle v.

b) $C(v) \subseteq GK(v)$ für alle v.

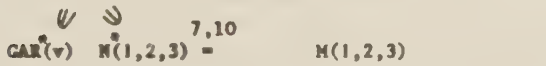
c) $GK(v)$ ist nicht invariant gegenüber Äquivalenztransformationen.

Beweis im Anhang A1.

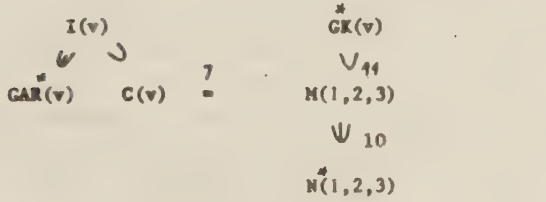
§ 19 Die Implikationsstruktur der Modelle

Nach den bisherigen Definitionen und Theoremen ergibt sich folgendes Implikationsschema der verschiedenen Modelle:

a) Für wesentliche Spiele mit leerem Kern gilt:



b) Für wesentliche Spiele mit nichtleerem Kern gilt:



Die Ziffern bedeuten die jeweiligen Theoreme.
* bedeutet: interpersoneller Nutzenvergleich vorausgesetzt.

c) Für Spiele mit einelementigem Kern gilt:

$$N(1,2,3) = GAR(v) = M(1,2,3) = C(v) \in I(v).$$

d) Für unwesentliche Spiele fallen alle hier angeführten Modelle in der Auszahlung $\vec{x} = (v_1, v_2, v_3)$ zusammen.

§ 20 Weitere Lösungstheorien

Es gibt noch einige weitere Lösungstheorien, die aber von anderen als den unseren Überlegungen zugrundeliegenden Lösungsbegriffen ausgehen. Da zu keiner dieser Theorien ein Verhandlungsschema in unserem Sinn existiert, wollen wir nur der Vollständigkeit halber die beiden wichtigsten Ansätze vorstellen.

a) Die von NEUMANN-MORGENSTERNsche Lösungstheorie

Von NEUMANN und MORGENSTERN (1953) sehen als Lösung eines n-Personen-Spiels mit Seitenzahlungen eine Menge NM an, die wie folgt definiert ist:

Die Menge NM enthält alle Imputationen $\vec{x} \in I(v)$ mit den Eigenschaften:

1) Von zwei beliebigen Elementen aus NM dominiert keines das andere. (Innere Stabilität)

2) Jede nicht zu NM gehörige Imputation wird von mindestens einem Element von NM dominiert. (Stabilität nach aussen)

Von NEUMANN und MORGENSTERN haben die Lösungsmengen für alle Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen angegeben. Wir wollen hier nur zwei Ergebnisse anführen:

1.) Zu vielen charakteristischen Funktionen gibt es mehrere (bis zu unendlich vielen) NM-Lösungen, d.h. verschiedene, nicht notwendig disjunkte Mengen, von denen jede den beiden Stabilitätsbedingungen genügt.

2.) Für Drei-Personen-Spiele gehört jede Auszahlung zu mehreren NM-Lösungen.

Die von NEUMANN-MORGENSTERNsche Lösungstheorie ist für unsere Problematik nicht relevant, weil es anscheinend kein zugehöriges Verhandlungsschema gibt. Das lässt sich wohl dadurch begründen, dass von NEUMANN und MORGENSTERN nicht an dem Verlauf von Konfliktverhandlungen interessiert waren, sondern die Stabilität gesellschaft-

licher Nutzenverteilungen im Blick hatten.
Ein stabiles Gesellschaftssystem ist nach von NEUMANN und MORGENSTERN ein System, in dem

1) keine Gruppe aufgrund ihrer Macht eine Umweltverteilung der Nutzenwerte erreichen kann,

2) jede aus dem System heraustretende Nutzenverteilung in dem Sinn unterdrückt wird, dass es eine Gruppe gibt, die eine im System enthaltene Nutzenverteilung vorzieht und diese auch durchsetzen kann.

b) Der SHAPLEY-Wert

SHAPLEY (1953) geht wieder von einem anderen Problem aus:
Gegeben seien mehrere Spiele, die durch die charakteristische Funktionen v,v',v'', ... beschrieben werden. SHAPLEY untersucht nun die Frage: Welches der Spiele v,v',v'', .. zu spielen ist für Spieler i am günstigsten und welche Rolle (Spieler 1,2,3..) am vorteilhaftesten ?
Er sucht also eine A-priori-Schätzung des Spiels und der Position im Spiel und betrachtet damit die Situation, in die man gerät, wenn man ein Spielkasino betritt und sich zwischen Roulette, Poker und Bakkarat zu entscheiden hat.
Der Wert dieses Spiels für den i-ten Spieler sei $\phi_i(v)$. Dieser Wert wird nach SHAPLEY eindeutig bestimmt durch drei anscheinend schwache Bedingungen:

1) Der Wert eines Spiels für einen Spieler soll nur von der strategischen Position des Spielers, nicht von seiner Benennung i abhängen.

2) Es soll (für Drei-Personen-Spiele) gelten:

$$\phi_1(v) + \phi_2(v) + \phi_3(v) = v_{123}.$$

3) Werden zwei Spieler v und v' zu einem neuen Spiel zusammengesetzt, das durch die charakteristische Funktion w = v+v' beschrieben wird, so soll gelten:

$$\phi_i(w) = \phi_i(v+v') = \phi_i(v) + \phi_i(v').$$

Aus diesen drei Bedingungen lässt sich eindeutig bestimmen

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in P(N)} \gamma_3(S)\,(v(S)-v(S-\{i\}))$$

mit $\gamma_3(S) = \frac{(|s|-1)!\,(3-|S|)}{3!}$ s = Zahl der Mitglieder von S

Der problematische Punkt ist Bedingung c. Stellen wir uns z.B. vor, dass alle Spieler den Nucleolus-Regeln folgen und die Spiele v und v' zu verschiedenen Fällen aus Theorem 10 gehören. In diesem Fall ist Bedingung c verletzt.
Aufgrund der von SHAPLEY behandelten Fragestellung gibt es auch zum SHAPLEY-Wert kein Verhandlungsschema in unserem Sinn.

KAPITEL 3

Experimentelle Überprüfung spieltheoretischer Modelle

§ 21 Normative und deskriptive Auffassung spieltheoretischer Modelle

Wie in Kapitel 1 schon angedeutet, können die in Kapitel 2 angeführten Lösungsmodelle auf zwei Arten interpretiert werden. Zum einen kann man sie ansehen als normative Modelle. In dieser Sichtweise geben die verschiedenen Lösungstheorien an, wie die Verhandlungen und Entscheidungen in Konfliktsituationen aussehen sollten, wenn jeder der Spieler sich vollkommen rational (d.h. den Regeln eines Modells gemäss) verhalten würde. Werden die Lösungstheorien in diesem Sinn interpretiert, so erhalten sie ihre Berechtigung nicht durch empirische Ergebnisse, sondern durch ein a priori festgelegtes Prinzip von Rationalität (wie etwa das Prinzip des Wettbewerbs oder das einer gerechten Einigung). Dies schränkt natürlich die Möglichkeit stark ein, Fragen der Modellüberprüfung auf experimentellem Weg zu beantworten.
Trotzdem gibt es einige Fragestellungen normativer spieltheoretischer Ansätze, die einer empirischen Untersuchung zugänglich wären, wie z.B. folgende: Gibt es einen Unterschied in der Bereitschaft der Versuchspersonen, unterschiedliche vom Versuchsleiter vorgeschlagene Lösungsmodi zu akzeptieren?

Uns sind keine experimentellen Untersuchungen zu dieser oder ähnlichen Fragestellungen bekannt.

Die zweite Möglichkeit der Interpretation von Lösungsmodellen ist die deskriptive. Werden Lösungsmodelle aufgefasst als Systeme von Regeln, die das reale Konfliktverhalten bestimmen und regeln, so ergibt sich die Möglichkeit, die empirische Implikationen der Modelle experimentell zu überprüfen. Umgekehrt ergeben sich dann aus den Ergebnissen der Experimente und den Äusserungen und Argumenten der Spieler Schlüsse bezüglich der zugrundeliegenden Regeln und der Logik des Konfliktverhaltens.

Dieser Ansatz liegt allen bisher durchgeführten Experimenten zugrunde.

§ 22 Drei-Personen-Spiele in Form der charakteristischen Funktion

Neben einer Serie von Nichtkonstantsummen-Spielen, also Spielen mit einem Konfliktmass zwischen 0 und 1 (KAHAN und RAPORT 1972) und einer Serie von Spielen, von denen jedes nur einmal gespielt wurde (MASCHLER 1965) sind bisher keine experimentellen Untersuchungen von Drei-Personen-Spielen in Form der charakteristischen Funktion veröffentlicht worden. Die Ergebnisse dieser Versuche wollen wir am Ende dieses Paragraphen mit den Resultaten unserer Experimente vergleichen.

Zu den von uns durchgeführten Versuchen:

Grundlage unseres Versuchsplans bildeten folgende Probleme:

1.) Koalitionsbildung

Welche Koalition bildet sich in Abhängigkeit von

a) Konfliktmass m(v)

b) Symetrieeigenschaften des Spiels

c) Relation der Grössen v_{12}, v_{13}, v_{23} zueinander ?

2.) Einigungen

a) Sind die Einigungen Imputationen und liegen sie bei Spielen mit nichtleerem Kern im Kern ?

b) Welches der vergleichbaren Modelle Bargaining Set, Nucleolus und Gleichaufteilung des Restes liefert die beste Prognose der Einigung ?

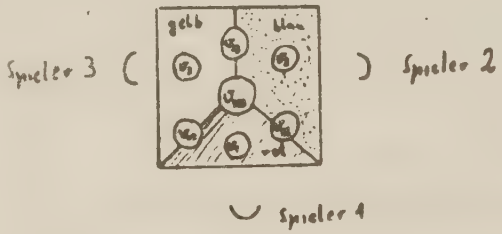
3.) Verhandlungen

a) Wie hängt die Struktur der Verhandlungen (Dauer und Argumentation) vom Konfliktmass m(v) ab ?

b) Entspricht die reale Argumentation einem der in den Modellen formalisierten Argumentationstypen ?

In zwei Versuchsserien wurden Experimente mit insgesamt 72 Versuchspersonen durchgeführt. Die Versuchspersonen waren männliche und weibliche Studenten der Universität des Saarlandes, die sich freiwillig gemeldet hatten.

In der ersten Serie spielten 12 Gruppen von je drei Personen je 4 Spiele mit verschiedenen charakteristischen Funktionen, in der zweiten Serie spielten 12 andere Gruppen je 4 Spiele mit anderen charakteristischen Funktionen.
Die Spieler sassen an einem dreifarbigen Spielbrett, auf dem die 7 Zahlen der charakteristischen Funktion in der hier angegebenen Weise aufgezeichnet waren:



Die Versuchspersonen erhielten folgende Instruktion:

"Jeder Spieler besitzt eins der drei aneinandergrenzenden Grundstücke und will es verkaufen. (Spieler 1 das rote, Spieler 2 das blaue und Spieler 3 das gelbe).
Es gibt 7 Angebote von Kaufinteressenten:

je eins für ein Grundstück allein: Zahlen v_1, v_2, v_3,
je eins für zwei Grundstücke: v_{12}, v_{13}, v_{23},
und eins für alle drei Grundstücke zusammen: v_{123}.

Ihre Aufgabe besteht darin, sich zu einigen, an welchen oder welche Käufer das Land verkauft wird, und - falls an einen Käufer, der mehr als ein Grundstück kauft - wie die erhaltene Summe geteilt wird. Der Einigung gemäss wird das Geld anschliessend in DM an Sie ausgezahlt.

Das Spiel ist dann zu Ende, wenn Sie sich entweder alle drei geeinigt haben oder wenn sich zwei Spieler geeinigt haben, an ihren Interessenten zu verkaufen und der dritte diese Koalition innerhalb von zwei Minuten nicht sprengen kann oder wenn jeder Spieler beschlossen hat, einzeln zu verkaufen."

Die Verhandlungen wurden auf Tonband aufgenommen und mitprotokolliert. Die Reihenfolge der 4 Spieler A,B,C,D bzw. E,F,G,H, die jede Gruppe spielte, wurde nach einem balancierten Blockplan bestimmt. Jeweils drei Gruppen spielten die 4 Spiele in der Reihenfolge:

A B C D
B D A C
C A D B
D C B A

Entsprechend lautet der Blockplan für E,F,G,H.
Tabelle 1 enthält die charakteristischen Funktionen der 8 Spiele:

	A	B	C	D	E	F	G	H
v_1	3	1	3	3	0	2	2	1
v_2	4	3	3	1	3	0	0	1
v_3	2	1	3	2	3	0	0	1
v_{12}	10	9	7	6	6	9	6	8
v_{13}	8	7	8	5	6	7	6	8
v_{23}	9	9	7	5	7	2	7	8
v_{123}	12	12	12	12	9	9	9	9

Tab. 1
Die charakteristischen Funktionen

Die Analyse der Daten geschieht in zwei Schritten:
Im ersten Schritt wollen wir die empirischen Einigungen mit den theoretischen Ergebnissen der Lösungsmodelle vergleichen, im zweiten Schritt auch den Verhandlungsablauf in die Analyse einbeziehen.

Die Tabellen 2 und 3 geben die Einigungspunkte wieder. Die unterstrichenen Auszahlungskomponenten gehören zu einer Koalition. Die Spielfolgen 2 und

11 der Serie A,B,C,D sind eingeklammert, da hier stets ohne Verhandlung die Gleichaufteilung gewählt wurde, also offenbar keine Nutzenmaximierung vorlag.

Spiel Nr.	Spiel A			Spiel B			Spiel C			Spiel D		
1	4	5	3	3.75	4.5	3.75	4.25	3.5	4.25	5	3	4
2	(4	4	4)	(4	4	4)	(4	4	4)	(4	4	4)
3	5	5	2	3.75	4.5	3.75	4.25	3.5	4.25	5	2.5	4.5
4	4	5	3	3.75	4.5	3.75	4	4	4	4	4	4
5	5	5	2	4	4	4	4.25	3.5	4.25	4.4	3.4	4.2
6	3.5	4	4.5	4	4	4	4.25	3.5	4.25	5	2.5	4.5
7	4.4	5.6	2	3.35	5.3	3.35	4	4	4	5	3	4
8	4	5	3	3.5	5	3.5	4.35	3.3	4.35	5	3	4
9	4.5	5.5	2	3.8	4.4	3.8	4	4	4	4.4	3.6	4
10	4	5	3	4	4	4	4.25	3.5	4.25	5	3	4
11	(4	4	4)	(4	4	4)	(4	4	4)	(4	4	4)
12	4.5	5.5	2	3.7	4.6	3.7	4.25	3.5	4.25	5	3	4

Tab. 2 Die Einigungspunkte der Spiele A,B,C,D

Spiel Nr.	Spiel E			Spiel F			Spiel G			Spiel H		
1	3	3	3	6	3	0	2	4.5	2.5	3	3	3
2	2	3.5	3.5	6.5	2	0.5	2.4	3.2	3.3	3	3	3
3	2	3.5	3.5	6	2	1	2	3.5	3.5	3	3	3
4	2.5	3	3.5	7	2	0	2	3.5	3.5	3	3	3
5	2	4	3	6	2	1	2	3.5	3.5	2	3	4
6	2	3.5	3.5	6	2	1	2	3.5	3.5	3	3	3
7	2	3	4	6.5	2	0.5	2	3.9	3.1	3	3	3
8	2.5	3	3.5	7	2	0	2	3	4	3	3	3
9	2.5	3.5	3	6	2	1	2	3.1	3.9	3	3	3
10	2	4	3	6	3	0	3.25	4.25	1.5	1	4	4
11	1.4	3.8	3.8	6.5	2.5	0	2	3.5	3.5	3.5	2	3.5
12	2	3.5	3.5	7	2	0	3	3	3	3	3	3

Tab. 3 Die Einigungspunkte der Spiele E,F,G,H

Da die Lösungsmodelle für verschiedene Koalitionsstrukturen verschiedene Lösungen anbieten, ist es nicht sinnvoll, Mittelwerte und Varianzen über alle Gruppen zu berechnen, sondern nur über die mit gleicher Koalitionsstruktur. Tabelle 4 enthält die Zahl n, die angibt, wie oft sich die betreffende Koalition bei der zwölffachen Durchführung des jeweiligen Spiels gebildet hat, die Mittelwerte

$$\bar{x}_i = 1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

über die n Spiele mit gleicher Koalitionsstruktur und die normierten Streuungen

$$s_j = \frac{1}{v(S) - \sum_{i \in S} v_i} \left(1/n \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \bar{x}_j^2 \right)\right)^{1/2}$$

Der Normierungsfaktor $\frac{1}{v(s) - \sum_{i \in S} v_i}$ ermöglicht uns den Vergleich der Streuung in verschiedenen Koalitionen. Die Grösse $v(S) - \sum_{i \in S} v_i$ gibt die Intervallspannen an, in der die Komponente x_i der koalitions- und individuell rationalen Auszahlung $\vec{x}$ sich bewegen kann, wenn sich Koalition S bildet. Diese Intervallspanne wird auf 1 normiert.

Tabelle 4 Mittelwerte und Varianzen der Auszahlungen bei gleicher Koalitionsstruktur

(folgende Seite)

	(1,2,3)	(1,2)	(1,3)	(2,3)
	n	n	n	n
	x_1 x_2 x_3	x_1 x_2	x_1 x_3	x_2 x_3
	s_1 s_2 s_3	s_1 s_2	s_1 s_3	s_2 s_3
A	4	5	1	0
	4 5 3	4.7 5.3	3.5 4.5	
	0 0 0	0.087 0.087	0 0	
B	10	0	0	0
	3.76 4.48 3.76			
	0.029 0.058 0.029			
C	10	0	0	0
	4.19 3.62 4.19			
	0.041 0.083 0.041			
D	10	0	0	0
	4.78 3.10 4.12			
	0.025 0.031 0.014			
E	6	3	3	0
	2.07 3.47 3.47	2.2 3.8	2.33 3.67	
	0.155 0.077 0.077	0.078 0.078	0.078 0.078	
F	6	6	0	0
	6.16 2 0.84	6.58 2.42		
	0.05 0 0.05	0.063 0.063		
G	3	0	0	9
	2.88 3.51 2.61			3.55 3.45

Tab.4 Mittelwerte und Varianzen der Auszahlungen bei gleicher Koalitionsstruktur

Tabelle 5 enthält die Konfliktmasse der 8 Spiele.

v	A	B	C	D	E	F	G	H
m(v)	+1	+2/7	-4/9	-7/9	+1/3	0	+1/6	+1

Tab. 5 Die Konfliktmasse

Die Tabellen 6,7 und 8 enthalten die theoretischen Lösungen von Bargaining Set, Nucleolus und Gleichverteilung des Restes (GAR).

	M(1,2,3)			M(1,2)		M(1,3)		M(2,3)	
	m_1	m_2	m_3	m_1	m_2	m_1	m_3	m_2	m_3
A	4	5	3	4.5	5.5	4.5	3.5	5.5	3.5
B	3.33	5.33	3.33	3.5	5.5	3.5	3.5	5.5	3.5
C	=Kern			4	3	4	4	4	3
D	=Kern			3	3	3	2	3	2
E	2.33	3.33	3.33	2.5	3.5	2.5	3.5	3.5	3.5
F	7	2	0	7	2	7	0	2	0
G	2.33	3.33	3.33	2.5	3.5	2.5	3.5	3.5	3.5
H	3	3	3	4	4	4	4	4	4

Tab. 6 Die Auszahlungen des Bargaining Set

	$\vec{n}(1,2,3)$			$\vec{n}(1,2)$		$\vec{n}(1,3)$		$\vec{n}(2,3)$	
	n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_1	n_3	n_2	n_3
A	4	5	3	4.5	5.5	4.5	3.5	5.5	3.5
B	3.33	5.33	3.33	3.5	5.5	3.5	3.5	5.5	3.5
C	4.25	3.5	4.25	3.5	3.5	4	4	3.5	3.5
D	5	3	4	4	2	3	2	2	3
E	2.33	3.33	2.33	1.5	4.5	1.5	4.5	3.5	3.5
F	7	2	0	5.5	3.5	4.5	2.5	1	1
G	2.33	3.33	3.33	4	2	4.5	2.5	3	4
H	3	3	3	4	4	4	4	4	4

Tab.7 Die Auszahlungen des Nucleolus

v	A	B	C	D	E	F	G	H
r_1	4	3.33	4	5	1	4.33	4	3
r_2	5	5.33	4	3	4	2.33	2	3
r_3	3	3.33	4	4	4	2.33	3	3

Tab.8 Die Gleichverteilung des Restes für die grosse Koalition

Zum Vergleich der empirischen mit den theoretischen Lösungen benötigen wir ein Distanzmass. Dazu wählen wir den normierten euklidschen Abstand

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{v(s) - \sum_{i \in s} v_i} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

n = Zahl der Komponenten von $\vec{x}$ und $\vec{y}$

für zwei koalitions- und individuell rationale Auszahlungen $\vec{x}$ und $\vec{y}$.
Der Normierungsfaktor wurde aus dem gleichen Grund wie bei den Streuungen eingeführt.

Zur Auswertung der Daten:

Die Frage der Koalitionsbildung wollen wir zurückschieben bis zur Analyse der Verhandlungsstruktur, insbesondere weil sich im Fall der Spiele mit $0 < m(v) < 1$ oft sozusagen eine Zweierkoaltion innerhalb der Dreierkoalition bildete, eine Möglichkeit, die wir bisher nicht in Erwägung zogen, die aber bei Kenntnis der Verhandlungsstruktur sehr plausibel erscheint.

Die Datenanalyse zeigt folgende Ergebnisse:

1.) Imputation und Kern (siehe Tab. 2 und 3)

a) Es wurden in allen 32 Spielen Imputationen als Einigungen gewählt.
(Die Regeln R1, R2 und R3 (individuelle Rationalität, ausschöpfende Koalitionsstruktur und Koalitionsrationalität) wurden also immer befolgt)

b) Von den 8 verschiedenen Spielen haben nur die Spiele C, D und F einen nichtleeren Kern. Der Kern von Spiel F enthält nur ein Element, welches sehr weit von der Gleichverteilung abweicht, und eine ausschöpfende Zweierkoalition. In den Spielen C und D lag jede Einigung im Kern, in Spiel F zeigte sich meist eine Abweichung vom einelementigen Kern in Richtung zur Gleichverteilung hin.

2.) Vergleich der Lösungsmodelle

a) Bildung der grossen Koalition: Vergleich von Nucleolus und Gleichverteilung GAR (siehe Tab.2,3,7 und 8).
In den Spielen A,B,D und H liefern beide Modelle die gleiche Lösung. Hier ist kein Modellvergleich möglich.
In den übrigen Spielen liefert nach Tabelle 9 der Nucleolus ein deutliche besseres Modell als die Gleichverteilung des Restes GAR.

Spiel	C	D	F	G
$d(\vec{x},\vec{n})$	0.053	0.108	0.168	0.069
$d(\vec{x},\vec{r})$	0.158	0.430	0.340	0.290

Tab. 9 Vergleich zwischen Nucleolus und GAR.

Ein Vergleich der Tabellen 2,3 und 7 zeigt, dass Abweichungen vom Nucleolus immer auf die Gleichverteilung hin gerichtet sind.

b) Bildung einer Zweierkoalition: Vergleich zwischen Bargaining Set und Nucleolus

Ein Vergleich zwischen Bargaining Set und Nucleolus für Zweierkoalitionen war nur in den Spielen E,F und G möglich, da in Spiel: A und H beide Modelle dieselbe Lösung liefern und sich in den übrigen Spielen keine Zweierkoalition bildete.

Spiel		E	F	G
Koal.(1,2)	$d(\vec{n},\vec{x})$	0.329	0.204	
	$d(\vec{m},\vec{x})$	0.173	0.081	
Koal.(1,3)	$d(\vec{n},\vec{x})$	0.393		
	$d(\vec{m},\vec{x})$	0.077		
Koal.(2,3)	$d(\vec{n},\vec{x})$			0.129
	$d(\vec{m},\vec{x})$			0.011

Tab 10. Vergleich von Nucleolus und Bargaining Set

Hier zeigt sich nach Tabelle 10, dass bei allen vier Koalitionsbildungen das Bargaining Set Modell dem Nucleolus weit überlegen war. Aber auch hier wird eine Tendenz vom Bargaining Set zur Gleichverteilung hin deutlich.

3.) Die Spiele B,E und G

Für diese Spiele gilt $0 < m(v) < 1$. Sie zeichnen sich durch eine besondere Eigenschaft aus:
Es bildet sich zwar immer die grosse Koalition, aber innerhalb dieser bekam ein Spielerpaar (i,j) meist mehr als seinen Wert v_{ij}.
Eine Interpretation dieses Ergebnisses wird erst durch die Analyse des Verhandlungsverlaufs möglich.

Analyse des Verhandlungsverlaufs

Die Verhandlung besteht im typischen Fall aus einer Folge von Vorschlägen und bricht ab, wenn ein Vorschlag von allen drei Spielern akzeptiert wird oder wenn zwei Spieler sich auf eine durchsetzbare Auszahlung einigen und sich weigern, mit dem dritten Spieler weiter zu verhandeln.
Einige typische Verhandlungsverläufe finden sich in den Tabellen 11,12,13 und 14.

Spiel A					Spiel B				
von	an	Angebot			von	an	Angebot		
1	2	4.5	5.5	-	1	3	3.5	-	3.5
2	3	-	6	3	2	3		5.4	3.6
3	2	-	5.5	3.5	3	1,2	4.35	3.3	4.35
1	2	4.25	5.75	-	1	2	4	5	-
3	1	4.75	-	4.25	3	2	-	5.1	3.9
2	1	5	5	-	1	2	3.85	5.15	-
3	2	-	5.5	3.5	3	2	-	5.2	3.8
1	2	4.25	5.75	-	1	2	3.75	5.25	-
3	1	4.5	-	3.5	3	2	-	5.4	3.6
2	3	-	5.25	3.75	1	2	3.55	5.45	-
1	2	4.5	5.5	-	3	1	3.5	-	3.5
1	3	4.1	-	3.9	3	2	-	5.5	3.5
2	3	-	5	4	1	3	3.5	-	3.5
1	2	4.5	5.5	-	1	3	3.2	-	3.8
3	1	4.6	-	3.4	2	3	-	5.1	3.9
3	1,2	4	5	3	1	3	3	-	4
					3	1	3.5	-	3.5
					1	2,3	3.5	5	3.5

Tab.11 Typische Verhandlungen der Spiele A und B

Spiel C					Spiel D				
von	an	Angebot			von	an	Angebot		
3	1,2	4.25	3.5	4.25	2	1,3	4	4	4
2	1,3	4.3	3.4	4.3	1	2,3	4.5	3.75	3.75
3	1,2	4.35	3.3	4.35	3	1,2	6	2	4
					1	2,3	5	3	4
					3	1,2	5	2.3	4.7
					3	1,2	5	2.5	4.5

Tab.12 Typische Verhandlungen der Spiele C und D

Spiel E				Spiel F			
von	an	Angebot			von	an	Angebot
1	2	2	4	-	1	2	7 2 -
3	1	2.5	-	3.5	3	2	- 2 0
2	1	3.5	3.5	-	1	2	6 3 -
2	3	-	3.5	3.5	3	1	6.5 - 0.5
1	2	2	4	-	2	1	5 4 -
3	1	2.5	-	3.5	2	1	7 2 -
2	1	3.5	3.5	-			
1	2,3	2	4	3			

Tab.13 Typische Verhandlungen der Spiele E und F

Spiel G					Spiel H				
von	an	Angebot			von	an	Angebot		
1	2	3	3	-	2	1	4	4	-
3	2	-	3.5	3.5	3	1	5	-	3
1	2	2.5	3.5	-	2	3	-	4	4
3	1	3	-	3	1	2,3	3	3	3
2	3	-	3.5	3.5	1	2	3	5	-
1	2	2.3	3.7	-	3	1	4	-	4
3	2	-	3.8	3.2	2	1	3.5	4.5	-
1	2	2.2	3.8	-	3	2	-	5	3
3	2	-	3.9	3.1	3	1,2	3	3	3
1	2	2.1	3.9	-	1	3	3	-	5
2	3		3.9	3.1	2	1	4	4	-
					3	1,2	3	3	3

Tab.14 Typische Verhandlungen der Spiele G und H

v	$\bar{n}$	$\bar{t}$	$\bar{d}$	m(v)
A	17	20	14.8	1
B	11	14	9.5	0.29
C	3.3	5.5	0.1	-0.44
D	2.6	5	0.2	-0.79
E	10.2	15	8.9	0.3
F	7.2	11	3.2	0
G	8.8	3.5	7.1	0.17
H	12.1	16	10.8	1

$\bar{n}$=durchschnittliche Zahl der Angebote

$\bar{t}$=durchschnittliche Verhandlungsdauer

$\bar{d}$=durchschnittliche Zahl der Angebote, die das vorherige Angebot dominieren

m(v)=Konfliktmass

Tab. 15 Eigenschaften der Verhandlungen und Konfliktmass

Ergebnisse der Analyse der Verhandlungen:

a) Konfliktmass und Dauer des Spiels bzw. Konfliktmass und durchschnittliche Zahl der Angebote korrelieren positiv.

$r(\bar{n},m)=0.72$ und $r(\bar{t},m)=0.20$

(r=Produkt-Moment-Korrelation)

Der lineare Zusammenhang zwischen m(v) und $\bar{n}$ ist in Abbildung 4 dargestellt.

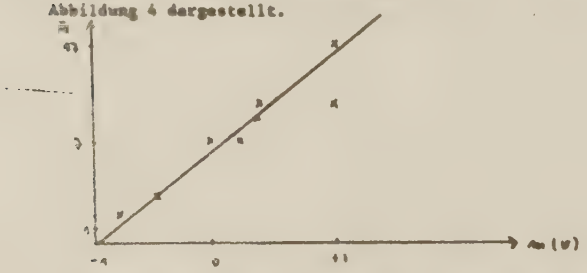


Abb. 4 Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Zahl der Angebote und Konfliktmass.

b) Auch die Verhandlungsstruktur hängt wesentlich vom Konfliktmass m(v) ab.

Für m(v) < 0 (Spiele mit nichtleerem Kern) gilt:

Die Verhandlung bewegt sich im Kern. Daher nominiert kein Angebot das vorherige. Die Verhandlung folgt im wesentlichen dem Verhandlungsschema des Nucleolus-Modells.

Für $m(v) = -1$ (Konstantsummen-Spiele) gilt:

Die Verhandlung beginnt mit einer Reihe von Angeboten, wobei jedes das vorhergehende dominiert. Nach einer Weile erkennen die Spieler die Zyklizität der zugrundeliegenden Regel R4 und es bildet sich eine feste Koalition, die ihren Gewinn nach den Regeln des Bargaining Set Modells aufteilt.

Für $0 < m(v) < 1$ (Konstantsummen-Spiele ohne Kern) gilt:

Die Verhandlung beginnt wie im Fall $m(v) < 1$ mit einer Reihe von Angeboten, die sich sukzessive dominieren. Dabei versucht jede Zweierkoalition ihren erreichbaren Gewinn durchzusetzen, d.h. es gilt stets für eine Koalition (i,j)

$$x_i + x_j = v_{ij}.$$

Nach einer Weile erkennen die Spieler die Zyklizität ihres Vorgehens. Es bildet sich eine feste Koalition, die ihren Gewinn den Regeln des Bargaining Set Modells gemäss aufteilt. Falls diese Koalition eine Zweierkoalition, etwa (1,2) ist, die keiner ausschöpfenden Koalitionsstruktur angehört, ist die so erhaltene Aufteilung nicht ausschöpfend:

$$x_1 + x_2 = v_{12}\ ,\quad x_3 = v_3$$

und

$$x_1 + x_2 + x_3 = v_{12} + v_3 < v_{123}.$$

Nachdem die Spieler dies erkannt haben, schliesst sich die stabile Zweierkoalition mit dem dritten Spieler zur grossen Koalition zusammen, beharrt allerdings auf der Forderung, mindestens v_{12} oder etwas mehr zu bekommen, notfalls mit der Drohung, andernfalls allein zu arbeiten. Der auf diese Weise zusätzlich erreichte Gewinn wird nach irgendeinem Modus, meist dem der Gleichverteilung, auf die drei Spieler verteilt.

c) Die Tendenz zur Gleichverteilung des Gewinns wird meist erreicht durch Hinweis auf eine möglichst gerechte Aufteilung.

d) Bei Zweierverhandlungen werden Angebote abgelehnt, die nicht im Gleichaufteilungskern GK liegen.

Die unter b angeführte Verhandlungsstruktur von Spielen mit $0 < m(v) < 1$ erklärt, warum die Einigung dieser Spiele nicht im Bargaining Set für die grosse Koalition liegen, obwohl sich letzten Endes die grosse Koalition bildet.
Innerhalb der grossen Koalition bildet sich hier eine Zweierkoalition, die ihren Gewinn durchsetzt.
In Spiel B bildet sich 10 mal die grosse Koalition, darin aber in 9 Fällen die Koalition (1,3),
in Spiel E 6 mal die grosse Koalition, darin 5 mal (2,3),
in Spiel C 3 mal die grosse Koalition, darin 2 mal (1,2).

Wir kommen nun zurück zu den Koalitionsregeln, die auch bestimmen, welche Zweierkoalition sich in Spielen mit $0 < m(v) < 1$ innerhalb der Dreierkoalition bildet. Diese Regeln gibt Tabelle 16 wieder.

Eigenschaften des Spiels	Koalitionswahrscheinlichkeiten
$m(v) \doteq 0$; $v_{ij}+v_k < v_{123}$ für alle i,j,k	$p(1,2,3) \gg p(S)$; $S \neq \{1,2,3\}$
$m(v)$ beliebig, ex. (i,j) mit $v_{ij}+v_k = v_{123}$	$p(i,j) \gg p(S)$ $S \neq (i,j)$
$m(v) > 0$ $v_{ij} > v_{ik} > v_{jk}$	$p(i,j) > p(i,k) > p(j,k)$
$m(v) > 0$ $v_{ij} = v_{ik} > v_{jk}$ $v_j = v_k$	$p(j,k) > p(i,j) = p(i,k) > p(1,2,3)$
$m(v) > 0$ $v_{12} = v_{13} = v_{23}$ $v_1 = v_2 = v_3$	$p(1,2,3) > p(S)$ $S \neq 1,2,3.$

Tab.16 Die Koalitionswahrscheinlichkeiten

Nach Tabelle 16 bildete sich stets eine ausschöpfende Koalitionsstruktur, wenn möglich mit einer Zweierkoalition. In Spielen ohne Kern bildete sich meist eine Zweierkoalition, eventuell in der grossen Koalition; falls keine Symetrien vorlagen, bildete sich dabei die stärkste Koalition, und falls zwei Spieler symmetrisch waren, die Koalition dieser beiden Spieler. Eine Ausnahme stellte das Spiel dar, in dem alle Spieler symmetrische Positionen innehatten: hier bildete sich stets die grosse Koalition.

Vergleich mit Experimenten anderer Autoren:

KAHAN und RAPOPORT (1972) führten eine Reihe von Drei-Personen-Spielen in Form der charakteristischen Funktion durch, in denen sich die Versuchspersonen weder sahen noch hörten, sondern nur über Tasten und Ziffernanzeigen eines Computers miteinander kommunizieren konnten (minimal social situation). Es wurden 5 verschiedene Spiele mit $0 < m(v) < 1$ und einer ausschöpfenden Zweierkoalition gespielt.
Meist bildete sich diese Zweierkoalition und Verhandlung und Einigung folgte dem Bargaining Set Modell.
Die Ergebnisse stimmen also voll mit den unsrigen überein.

MASCHLER (1965) führte nach einem ähnlichen Versuchsplan wie unserem 78 Spiele mit verschiedenen charakteristischen Funktionen durch, dabei jedes aber nur einmal. Seine Ergebnisse bestätigen die unsrigen sowohl hinsichtlich der Koalitionsbildung als auch der Aufteilungen. Hinsichtlich des Verhandlungsverlaufs sind uns leider keine Daten bekannt.

Zusammenfassung

1. In den Spielen und unter den Koalitionsstrukturen, wo

   a) Nucleolus und Gleichaufteilung des Restes vergleichbare Modelle darstellen, stimmen die Voraussagen des Nucleolus-Modells besser mit den experimentellen Daten überein als die der Gleichaufteilung des Restes (Tab. 9),

   b) Bargaining Set und Nucleolus vergleichbar sind, liefert das Bargaining Set Modell bessere Ergebnisse als der Nucleolus (Tab. 10).

2. Die Argumentationsweise der Spieler stimmt mit diesen Ergebnissen überein.
   Die Zahl der Angebote in einer Verhandlung korreliert noch mit dem Konfliktmass.

3. Auch die Koalitionswahrscheinlichkeiten sind vom Konfliktmass abhängig (Tab. 16).

§ 23 Drei-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen in Normalform

Nachdem wir einige Versuchsergebnisse von Spielen in Form der charakteristischen Funktion angeführt haben, gehen wir nun über zu Drei-Personen-Spielen in Normalform.
Aus der Literatur sind uns keine Experimente zu diesem Themenbereich bekannt.

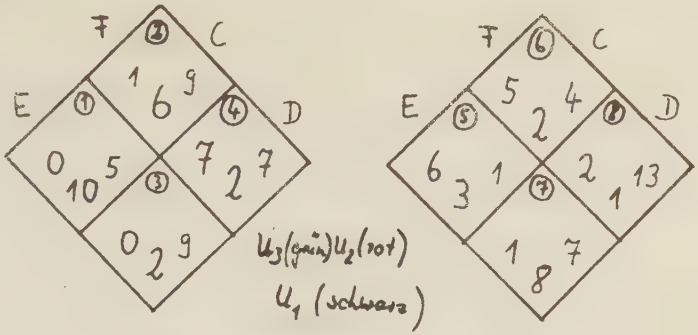
Wir führen Versuche mit 36 Versuchspersonen durch, wieder mit Studenten der Universität des Saarlandes. 12 Gruppen zu je 3 Spielern spielten je drei Spiele A,B,C, deren Reihenfolge durch einen balancierten Blockplan bestimmt war. Je zwei Gruppen spielten in der Reihenfolge

A B C
B A C
C A B
C B A
B C A
A C B

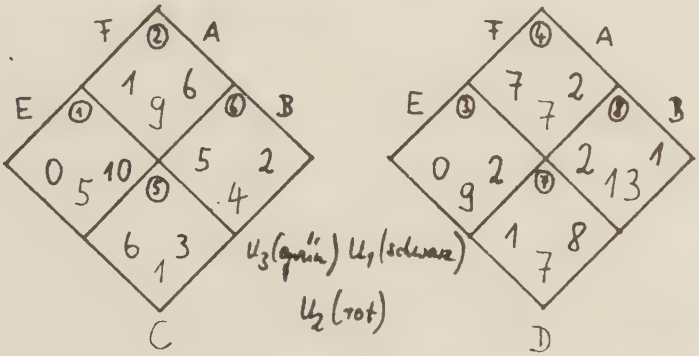
Die drei Spieler sassen sich an einem Tisch gegenüber. Jeder hatte die Normalform des Spiels in einer der angegebenen Darstellungen vor sich.

Spieler 1 (schwarz) hat sich zwischen A und B zu entscheiden,
Spieler 2 (rot) zwischen C und D und
Spieler 3 (grün) zwischen E und F.

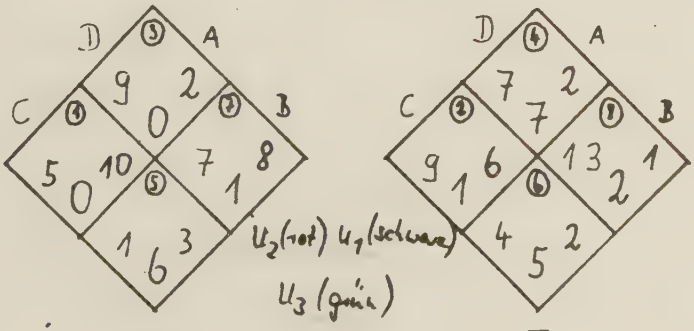
Die Auszahlungen an die Spieler stehen in ihrer Farbe auf dem jeweils erreichten Feld.



Spieler 1

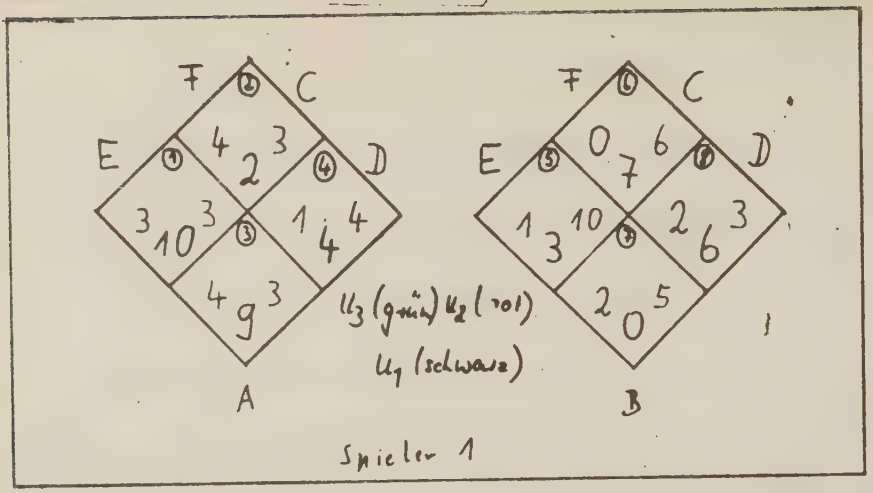


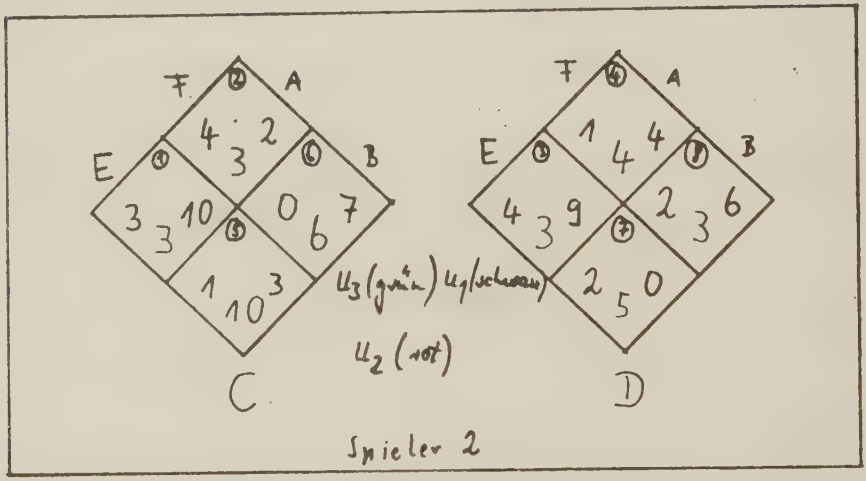
Spieler 2

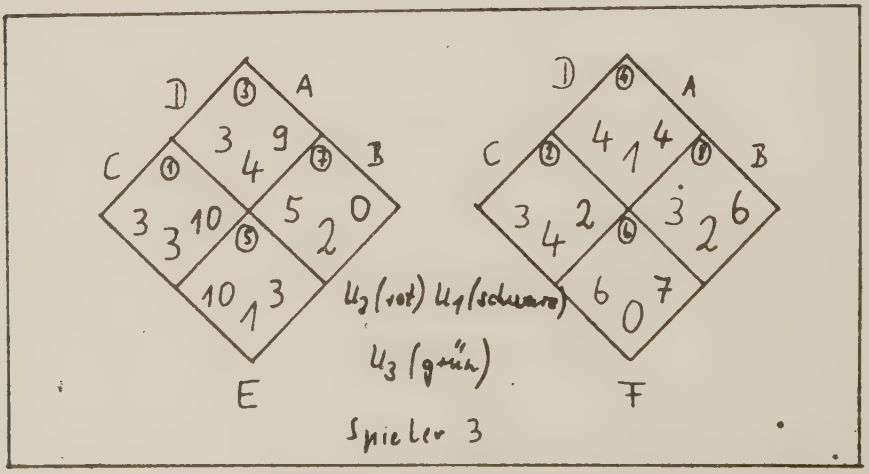


Spieler 3

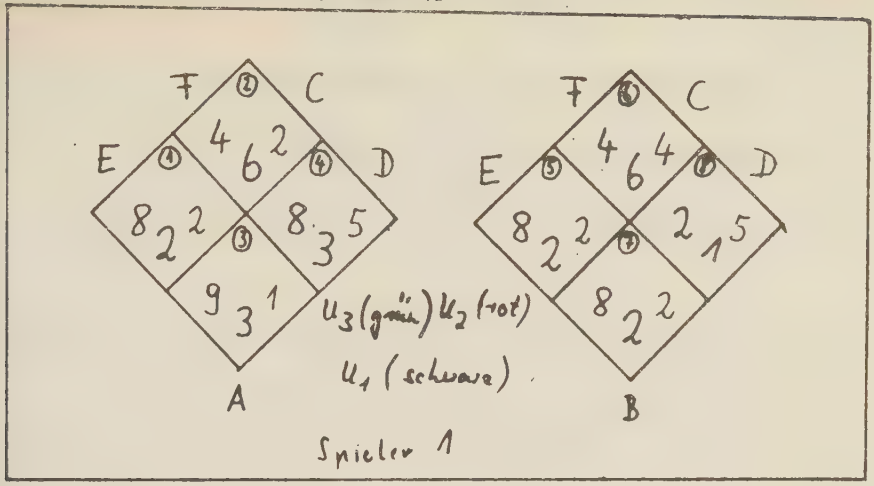
Die Vorlagen für Spiel A

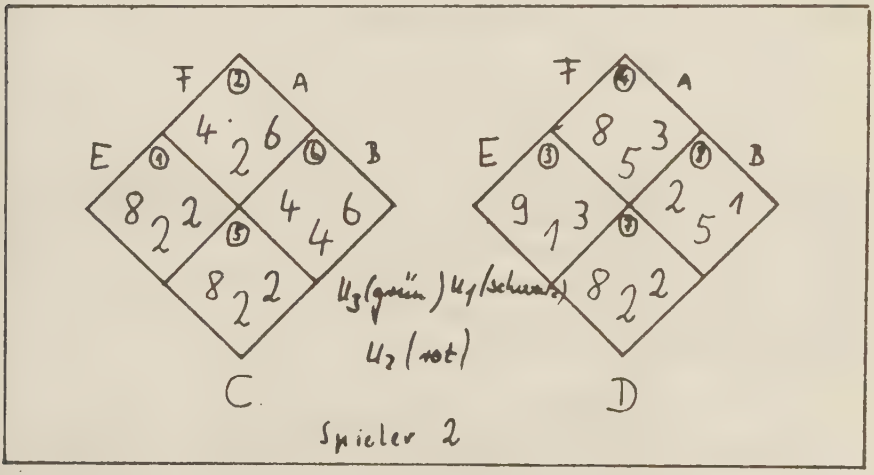


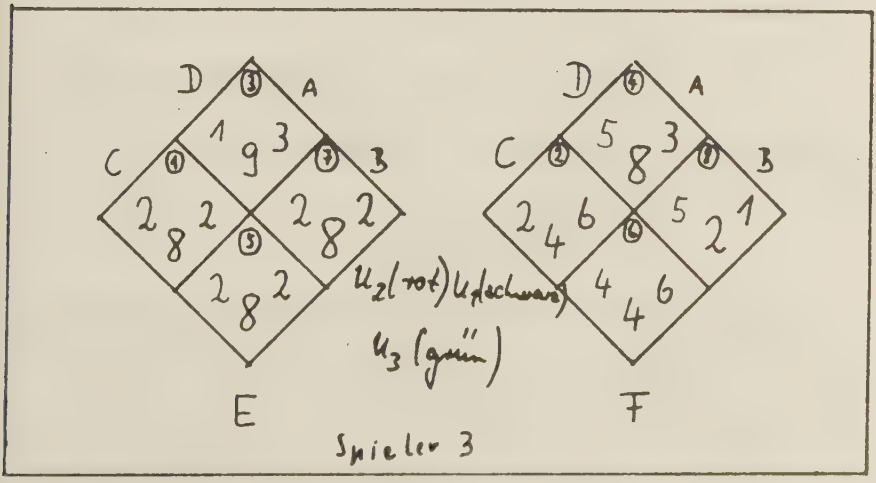




Die Vorlagen für Spiel B







Die Vorlagen für Spiel C

Die charakteristischen Funktionen der drei Spiele lauten:

Spiel A: $v_1 = 2(A)$, $v_2 = 7(D)$, $v_3 = 1(f)$

$v_{12} = 15(AC)$, $v_{13} = 9(BE)$, $v_{23} = 14(DF)$

$v_{123} = 16(ACF)$

Spiel B: $v_1 = 2(a)$, $v_2 = 3(c)$, $v_3 = 1(E)$

$v_{12} = 13(BC)$ $v_{13} = 13(AE)$, $v_{23} = 7(DE)$

$v_{123} = 16(ADE)$

Spiel C: $v_1 = 2(A)$, $v_2 = 2(C)$, $v_3 = 8(F)$

$v_{12} = 4(AC)$, $v_{13} = 10(AE)$, $v_{23} = 10(CE)$

$v_{123} = 16(ADF)$.

Die in Klammern angegebenen Buchstaben liefern eine mögliche Strategie bzw. ein Strategienpaar oder -tripel, welche(s) zu dem entsprechenden Wert führt.
Spiel A ist ein Konstantsummenspiel: m(A) = -1,
Spiel B ist ein Nichtkonstantsummenspiel ohne Kern: m(B) = -0.1,
Spiel C ist ein Spiel mit grossem Kern: m(C) = +1.
Die Spieler erhielten folgende Instruktion:

"Jedem von Ihnen ist eine Farbe zugeordnet:

Spieler 1: schwarz
Spieler 2: rot
Spieler 3: grün.

Es werden drei Spiele gespielt, die nach denselben Regeln ablaufen. Diese drei Blätter gehören zum ersten Spiel. Jeder Spieler hat die Möglichkeit, sich zwischen zwei Alternativen zu entscheiden.

schwarz zwischen A und B,
rot zwischen C und D,
grün zwischen E und F.

Hat jeder seine Wahl getroffen, so bekommt jeder Spieler den Betrag in DM ausbezahlt, der in seiner Farbe in dem betreffenden Feld steht.

Bei der Wahl BCE etwa bekommt Spieler 1 3 DM, Spieler 2 10 DM und Spieler 3 1 DM.

Es ist ihnen erlaubt, ihre Strategien aufeinander abzustimmen und nach Vereinbarung ihr gewonnenes Geld beliebig aufzuteilen, z.B. können Spieler 1 und 2 in dem eben genannten Beispiel vereinbaren, ihren Gewinn von 10+3DM = 13 DM in je 6.50 DM aufzuteilen.
Das Spiel ist dann zu Ende, wenn jeder von Ihnen sich entschieden hat."

Nachdem diese Instruktion gegeben war, prüfte der Spielleiter durch ein Probespiel, ob jeder Spieler die Spielregeln verstanden hatte.

Wir werden im ersten Teil der Datenanalyse wieder nur die Einigungen betrachten und erst anschliessend den Verhandlungsverlauf in die Betrachtungen einbeziehen.

Tabelle 17 gibt alle Endauszahlungen wieder:

	Spiel A			Spiel B			Spiel C		
n	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
1	5.33	(5.33)	5.33	6.5	6.5	3	5.33	5.33	(5.33)
2	2	7	7	9.5	3.5	3	3	5	8
3	2	7	7	7	5	4	5	5	(6)
4	4	7	5	6	6	4	4	4	8
5	5	7	4	8	4	4	3	4	9
6	5	(6)	5	7	4.5	4.5	4.5	4.5	(7)
7	4.5	7	4.5	9.4	3	3.6	3.5	4.5	8
8	5	10	1	8	3	5	3	5	8
9	5	8	3	8	4	4	4	4	8
10	4	8	4	8	4	4	4	5	(7)
11	7.5	7.5	1	5	5	6	5	5	(6)
12	7.5	7.5	1	6	5	5	3.5	3.5	9

Tab. 17 Die Endauszahlungen

Die unterstrichenen Komponenten in Tabelle 17 gehören zu einer Koalition, die eingekreisten Komponenten verletzen die individuelle Rationalität. Tabelle 18 enthält die Mitgliederzahlen n der Koalitionen, die Mittel werde $\bar{x}_i$ der Auszahlungen über die Koalitionen und die normierten Streuungen s_i.

	Koal.(1,2,3)	Koal.(1,2)	Koal.(1,3)	Koal.(2,3)
	n	n	n	n
	x_1 x_2 x_3 s_1 s_2 s_3	x_1 x_2 s_1 s_2	x_1 x_3 s_1 s_3	x_2 x_3 s_2 s_3
Spiel A	4 4.83 6.84 4.33 0.082 0.198 0.151	3 6.66 8.34 0.195 0.195	3 4.5 3.5 0.068 0.068	2 7 7 0 0
Spiel B	10 7.24 4.35 4.41 0.122 0.089 0.068	0	2 8 5 0.187 0.187	- 0
Spiel C	12 3.98 4.57 7.45 0.197 0.137 0.282	0	0	0

Tab. 18 Mittelwerte und Streuungen der Auszahlungen bei gleicher Koalitionsstruktur

In Tabelle 19 sind die theoretischen Werte der Lösungsmodelle Bargaining Set, Nucleolus und Gleichaufteilung des Restes GAR angeführt.

	Spiel A			Spiel B			Spiel C		
$\vec{m}(1,2,3)$	4	9	4	9.33	3.33	3.33	=Kern		
$\vec{m}(1,2)$	5	10		9.5	3.5		2	2	
$\vec{m}(1,3)$	5		4	9.5		3.5	2		8
$\vec{m}(2,3)$		10	4		3.5	3.5		2	8
$\vec{n}(1,2,3)$	4	9	3	9.33	3.33	3.33	3.33	3.33	9.33
$\vec{n}(1,2)$	5	10		6	7		2	2	
$\vec{n}(1,3)$	5		4	7		6	2		8
$\vec{n}(2,3)$		10	4		4.5	2.5		2	8
$\vec{r}_{123}$	4	9	3	5.33	6.33	4.33	3.33	3.33	9.33

Tabelle 19 Die Auszahlung von Bargaining Set, Nucleolus und GAR

Tabelle 20 schliesslich gibt die durchschnittliche Verhandlungsdauer der drei Spiele an.

$\bar{t}A$	24.5 min
$\bar{t}B$	20.1 min
tC	11 min

Tabelle 20 Die durchschnittliche Verhandlungsdauer $\bar{t}$ (min.)

Ergebnisse:

a) Die Regel der Gruppenrationalität wurde bei allen 36 Einigungen erfüllt.

$$x_1+x_2+x_3 = v_{123}.$$

b) Die Regel der individuellen Rationalität wurde von 7 der 36 Einigungen verletzt.

c) Zur Koalitionsbildung:
In dem Spiel mit nichtleerem Kern bildete sich stets die grosse Koalition. Insofern wurde die Koalitionsregel aus Tabelle 16

bestätigt. Ansonsten zeigte sich keine Übereinstimmung mit Tabelle 16.

d) Mittelwerte

Bei Bildung der grossen Koalition lässt sich in den Spielen A und C kein Modellvergleich durchführen.
Es gilt für Spiel A:

$$d(\bar{x}_{123},\vec{n}_{123}) = d(\bar{x}_{123},\vec{m}_{123}) = d(\bar{x}_{123},\vec{r}) = 0.389$$

und für Spiel C:

$$d(\bar{x}_{123},\vec{m}_{123}) = d(\vec{x}_{123},\vec{r}) = 0.467.$$

In beiden Spielen sind die Abweichungen von den Modellen grösser als in den Spielen in Form der charakteristischen Funktion.
In Spiel B lassen sich bei Bildung der grossen Koalition Bargaining Set und Nucleolus gegen die Gleichverteilung testen:

Es gilt:

$$d(\bar{x}_{123},\vec{m}_{123}) = d(\bar{x}_{123},\vec{n}_{123}) = 0.256$$

$$d(\bar{x}_{123},\vec{r}) = 0.252,$$

es lässt sich also kein Unterschied hinsichtlich Modellgüte feststellen.
Bei Bildung von Zweier-Koalitionen sind in Spiel A keine Modellvergleiche möglich.

Es gilt:

$$d(\bar{x}_{12},\vec{n}_{12}) = d(\bar{x}_{12},\vec{m}_{12}) = 0.391$$
$$d(\bar{x}_{13},\vec{n}_{13}) = d(\bar{x}_{13},\vec{m}_{13}) = 0.117.$$

Spiel C ermöglicht bei Bildung von Koalition (1,3) den Test des Bargaining Set Modells gegen den Nucleolus.

$$d(\bar{x}_{13},\vec{m}_{13}) = 0.212, \quad d(\bar{x}_{13},\vec{n}_{13}) = 0.2.$$

Es zeigt sich also kein deutlicher Unterschied.

e) Die normierten Streuungen der Einigungspunkte sind meist grösser als die der entsprechenden Spiele in Form der charakteristischen Funktion.

Analyse des Verhandlungsverlaufs

Der Verhandlungsverlauf ist bei weitem nicht so strukturiert wie in den Spielen, die durch ihre charakteristische Funktion vorgegeben waren. Es wurden in ungeordneter Folge

a) vorläufige Entscheidungen angekündigt

("Ich werde A wählen")

b) Aufteilungs- und Entscheidungsregeln vorgeschlagen.

(Wir sollten uns so entscheiden, dass wir zusammen den höchsten erreichbaren Betrag erhalten")

c) Einigungstripel vorgeschlagen.

("Die Entscheidung BGE ist die gerechteste")

Daher lässt sich der Verhandlungsverlauf nicht mehr als Sequenz von Vorschlägen darstellen. Trotzdem wird eine gewisse Struktur des Verhandlungsverlaufs aller Spiele erkennbar.

1. Schritt: Es werden die Tripel gesucht, die zu einer gruppenrationalen Aufteilung führen.

2. Schritt: Es wird ausschliesslich unter Berücksichtigung dieser Tripel ein Aufteilungsmodus des Gesamtwertes v_{123} gesucht, entweder mit oder ohne Berücksichtigung der Möglichkeit von Seitenzahlungen. Leitend ist hier die Idee einer gerechten Aufteilung.

Hier enden manche Spiele. Bis zu diesem Punkt sind weder die Werte v_{ij} noch v_i in die Entscheidungsfindung miteingegangen. Falls die Verhandlungen weitergeführt werden, ergeben sich zwei Möglichkeiten.

3. Schritt:

Fall a) Die Idee der individuellen Rationalität wird erkannt. Dieser Fall tritt nur in Spiel C ein. Hier erkennt Spieler 3 möglicherweise, dass er unabhängig von den Entscheidungen der anderen Spieler 8 DM durchsetzen kann. Dies ermöglicht

ermöglicht ihm zu drohen, er werde E wählen, sodass das einzige gruppenrationale Tripel, Feld 4, nicht erreicht wird, falls er nicht mehr als 8 DM bekommt.

Hier treten die Werte der Zweierkoalitionen v_{ij} nicht in Erscheinung.

Fall b) Die Idee der Zweierrationalität wird erkannt. Insbesondere in Spiel A erkennen zwei Spieler die Möglichkeit, gegen den dritten einen günstigen Gewinn durchzusetzen. Falls alle Zweierkoalitionen dies entdecken, kommt es zu zirkulären Verhandlungen wie im Fall der Spiele in Form der charakteristischen Funktion, die wie dort irgendwann abbrechen, entweder bei einer Zweierkoalition oder der grossen Koalition.

Hier werden die Einzelspielstärken v_i nicht berücksichtigt.

Da in keinem Fall alle 7 Werte der charakteristischen Funktion berücksichtigt werden, wird die Hypothese der Minimax-Strategien und damit die Möglichkeit der Reduktion der Spiele auf die charakteristische Funktion nicht experimentell bestätigt. Insofern ist keins der in Kapitel 2 vorgestellten Lösungsmodelle anwendbar. Es bleibt nur die nicht überprüfte Möglichkeit, dass durch langwierige Lerneffekte der Spieler eine stärkere Strukturierung der Situation und eine konsequentere Durchführung der Minimax-Strategien erreichbar ist.

§ 24 Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse

a) Spiele in Normalform

Wie schon aus den Ergebnissen von Zwei-Personen-Spielen zu erwarten, widerlegten auch unsere Versuche die Hypothese, dass Spieler ihre Strategien unter Minimax-Gesichtspunkten auswählen. (Dem Minimax-Theorem entsprechend würden die Spieler ihre Entscheidungen nur von den gemäss [9.2], [9.3] und [9.4] berechneten Koalitionsstärken abhängig machen). Dies hat zur Folge, dass Spiele in Normalform nicht ohne weiteres auf Spiele in Form der charakteristischen Funktion reduzierbar sind und verurteilt die auf der charakteristischen Funktion basierenden Lösungsmodelle zum Scheitern. Trotzdem wird eine gewisse Rationalität im Verhalten der Spieler erkennbar; insbesondere sind die Regeln der individuellen und der Gruppenrationalität meist gewahrt.

Drei-Personen-Spiele in Form der charakteristischen Funktion

Als vielversprechender erweisen sich Lösungs- und Verhandlungsmodelle für Drei-Personen-Spiele, die durch ihre charakteristische Funktion vorgegeben sind. Am interessantesten erscheinen die Modelle des Kerns, des Bargaining Set und des Nucleolus. Ein experimenteller Vergleich dieser drei Modelle ergibt, dass keins von ihnen das Spielverhalten für alle Spiele am besten erfasst; vielmehr erweist es sich als notwendig, ein Mass m(v) einzuführen, sodass für Verhandlungen und Einigung je nach Grösse von m(v) verschiedene Modelle die Daten optimal erfassen. Dieses System aus m(v) und den drei Modellen erweist sich als erstaunlich leistungsfähig für Verständnis und Prognose der Interaktion von Spielern in Konfliktsituationen, welche sich durch eine charakteristische Funktion erfassen lassen. Hier zeigt sich exemplarisch die Fruchtbarkeit eines Paradigmas, welches von der Annahme ausgeht, menschliches Handeln in gewissen Interaktionssituationen folge einsichtigen Regeln.

25 Mögliche Weiterführung von Theorie und Experimenten

Nachdem für Drei-Personen-Spiele in Form der charakteristischen Funktion einigermassen brauchbare mathematische Modelle entwickelt worden sind, wäre es interessant, Folgen solcher Spiele zu betrachten und mit Hilfe der vorliegenden Modelle Lern- und Konservatismuseffekte zu untersuchen. Hierher gehören Fragen wie: Lernen die Spieler, Spiele mit und ohne Kern von vornherein zu unterscheiden ? Stabilisieren sich gewisse Koalitionen so sehr, dass sie auch zusammenhalten, wenn dies für einige Mitglieder ungünstig ist ?

Das Ergebnis unserer Experimente, dass Spiele in Normalform nicht mit den Minimax-Strategien gespielt werden, könnte auf mangelnde Erfahrung der Spieler zurückgehen. Dies führt zur Hypothese, dass in längeren Sequenzen von Spielen in Normalform mit zunehmender Häufigkeit Minimax-Strategien gewählt werden.

Es liegt nahe, die Untersuchungen auf 4-Personen-Spiele auszudehnen, und insbesondere Kern, Nucleolus und Bargaining Set, die alle für n-Personen-Spiele definiert sind, auf ihre empirische Brauchbarkeit

hin zu testen. Desweiteren wäre hier wie im Fall n > 4 wohl eine differenziertere Theorie der Koalitionsbildung zu entwickeln, etwa auf die Hypothese hin, dass sich von mehreren möglichen Dreierkoalitonen stets die "konfliktfreieste" (gemäss unserem Konfliktmass) bildet. Die Komplexität der Koalitionsbildungsprozesse in Spielen mit mehr als drei Teilnehmern lässt es zweifelhaft erscheinen, ob auch hier noch ein skalares Konfliktmass wie im Fall der Drei-Personen-Spiele entwickelt werden kann.

d) Ein sehr weites und wohl auch vielversprechendes, weil für die Psychologie relevantes Forschungsgebiet bilden Drei-Personen-Spiele ohne Seitenzahlungen. Für solche Spiele existieren bisher überhaupt keine empirischen Untersuchungen, auch die mathematischen Ansätze sind erstaunlicherweise eher bescheiden.

LITERATUR

APEL, K. O., 1973 : Transformation der Philosopie. Bd. 2; Das Apriori der Kommunikationsgemeinschaft. Suhrkamp, Frankfurt a.M..

AUMANN, R. J., and MASCHLER, M., 1964 : The bargaining set for cooperative games. In: DRESHER, M.; SHAPLEY, L. S.; TUCKER A.W. (Eds.): Advances in game theory. Princeton University Press, S. 443-475

ASZARUS, H., 1974: Spieltheorie und Nutzenbegriff. Suhrkamp, Frankfurt a.M..

DAVIDSON, D., and SUPPES, P., 1956 : A finitistic axiomatisation of subjective probability and utility. ECONOMETRICA 24, S. 164-275

HABERMAS, J., 1970 : Zur Logik der Sozialwissenschaften. Surhkamp, Frankfurt a. M..

HABERMAS, J., 1971 : Vorbereitende Bemerkungen zu einer Theorie der kommunikativen Kompetenz. In: HABERMAS, J., und LUHMANN, N. Theorie der Gesellschaft oder Sozialtechnologie ?. Suhrkamp, Frankfurt a. M., S. 101-142

KAHAN, J. P., and RAPOPORT, A., 1972 : Test of bargaining set and the kernel model s in three-person-games. L. L. Thurstone Psychometric Laboratory, Chapel Hill, N. C., Report No. 112

KUHN, T., 1967 : Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Suhrkamp, Frankfurt a. M.

MILLER, G. A., GALANTER, E., and PRIBRAM, K., 1973 : Strategien des Handelns, Klett, Stuttgart.

LICHTENBERGER, J., 1974 : Der Nucleolus von Drei-Personen-Spielen mit Seitenzahlungen. Arbeiten der Fachrichtung Psychologie der Universität des Saarlandes, Nr. 16

LICHTENBERGER, J., und SONDERMANN, D., 1973: The bargaining set of three-person-games. Arbeiten der Fachrichtung Psychologie der universität des Saarlandes, Nr. 2

LUCE, R. D., and RAIFFA, H., 1957 : Games and decisions. J. Wiley and Sons, New York.

MASCHLER, M., 1965: Playing an n-person-game; An experiment. Economic research program, Research Memorandum No. 73, Princeton University, Princeton.

MITIS, C., 1958 : Schach. Ravensburger Verlagsbuchhandlung, Ravensburg.

von NEUMANN, J. und MORGENSTERN, O., 1944: Theory of games and economic behaviour. Princeton University Press, Princeton. (3.ed.1953)

NEWELL, A., SHAW, J. C., and SIMON, H. A., 1963: Report on a general problem solving program. In: Computers and Thought, Feigenbaum and Feldman, (Eds.) Mc Graw Hill, New York.

OWEN, G, 1971: Spieltheorie. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

PELEG, P., 1967 : Existence theorem for the bargaining set M_1^i. In: SHAPLEY, M. (ed.): Essays in mathematical economics, Princeton University Press, Princeton, S. 53-56

RAPOPORT, A., 1971: Three- and four-person-games. In: Comparative Group Studies, 2, 191-226

RAPOPORT, A., 1966 : Models of conflict. Cataclysmic and strategic. Deutsche Übersetzung in: BÜHL, W., 1972: Konflikt und Konfliktstrategie. Nymphenburger Verlagsbuchhandlung, München.

RICHARDSON, L. F., 1960 : Statistic of deadly quarrels, Pittsburg 1960

ROSENMÜLLER, J., 1971 : Kooperative Spiele und Märkte, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

SCHMEIDLER, D., 1969 : The nucleolus of a characteristic function game. In: SIAM Journal of applied mathematics, 17, No. 6, 1163-1170

SEARLE, J. B., 1971 : Sprechakte, Suhrkamp, Frankfurt a. M..

SKINNER, B. F., 1948 : Futurum Zwei. Wegner, Hamburg.

SELTEN, R., 1972: Equal share analysis of characteristic function experiments. In: SAUERMANN, H., (hrsg.), Beiträge zur experimentellen Wirtschaftsforschung, 3, S. 131-165

SHAPLEY, L. S. , 1953 : A value for n-person-games. In: KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. : Contributions to game theory, Princeton University Press, Princeton, 323-348

SHAPLEY, L. S., 1965 : On balanced sets and cores. The Rand Corporation RM - 4601-PR

SUPPES, P., and WINET, M., 1955 : An axiomatisation of utility based on the notion of utility differences. In Management Science, 1, 259-270

TACK, W. H., 1974: Zwei Theoreme zur Konstruktion von Drei-Personen-Spielen mit nichtleerem Kern. Zeitschrift für Sozialpsychologie, 5, S. 184-188.

THIBAUT, H. W., and KELLY, H. H., 1959 : The social psychology of groups. John Wiley and Sons, New York.

WINCH, P., 1966 : Die Idee der Sozialwissenschaft. Suhrkamp, Frankfurt a. M..

WITTGENSTEIN, L., 1971 : Philosophische Untersuchungen. Suhrkamp, Frankfurt a. M..

von WRIGHT, G. H., 1971 : Erklären und Verstehen. Athenäus Fischer, Frankfurt a. M..

Anhang A1 **BEWEISE**

Beweis von Theorem 1

Es existiere eine Aufteilung von v_{12} in $u_1^{12}(0)$ und $u_2^{12}(0)$ mit

$$[A1.1] \quad u_1^{12}(0)+u_2^{12}(0) = v_{12}$$

und jede andere Aufteilung von v_{12} in x_1 und x_2 sei durch Zahlung eines Geldbetrages x eines der beiden Spieler 1 oder 2 an den anderen erreichbar, d.h.: Für alle (x_1,x_2) mit $x_1+x_2 = v_{12}$ existiere ein x, sodass $u_1^{12}(x) = x_1$ und $u_2^{12}(-x) = x_2$.
Für dieses x gilt demnach

$$[A1.2] \quad u_1^{12}(x)+u_2^{12}(-x) = v_{12}.$$

Fordern wir eine streng monotone und stetige Abhängigkeit der Nutzenfunktionen von x, so gilt A1.2 für alle x. Setzen wir

$$[A1.3] \quad u_1^{12}(x) = u_1^{12}(0)+f_1(x) \qquad \text{und}$$

$$[A1.4] \quad u_2^{12}(x) = u_2^{12}(0)+f_2(x),$$

so folgt mit [A1.1] und [A1.2] :

$$[A1.5] \quad f_1(x)+f_2(-x) = 0 \qquad \text{für alle x.}$$

Mit analoger Definition von $f_3(x)$ zeigt man:

$$[A1.6] \quad f_1(x)+f_3(-x) = 0$$

$$[A1.7] \quad f_2(x)+f_3(-x) = 0$$

und

$$[A1.8] \quad f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3) = 0 \quad \text{für alle } (x_1,x_2,x_3) \text{ mit } x_1+x_2+x_3 = 0.$$

Subtraktion der Gleichung [A1.6] von [A1.5] ergibt:

$$[A1.9] \quad f_2(-x)-f_3(-x) = 0;$$

addieren wir [A1.9] zu [A1.7] , so erhalten wir:

[A1.10] $f_2(x)+f_2(-x) = 0$

Analog zu [A1.9] und [A1.10] zeigt man:

[A1.11] $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) := f(x)$

und

[A1.12] $f(x) = -f(-x)$ für alle x.

Setzen wir [A1.11] in [A1.8] ein, so erhalten wir für f(x) die Funktionalgleichung:

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) = 0 \quad \text{für alle } (x_1,x_2,x_3) \text{ mit } x_1+x_2+x_3 = 0.$$

Die spezielle Wahl $x_1 = x$, $x_2 = x$, $x_3 = 2x$ ergibt:

$$2f(x) = -f(-2x)$$

und nach [A1.12] :

[A1.13] $2f(x) = f(2x)$.

Die einzige stetige Lösung dieser Funktionalgleichung finden wir etwa durch den Potenzreihenansatz:

$$f(x) = \sum_{n=0} a_n \cdot x^n;$$

Sie lautet: $f(x) = a \cdot x$.

Mit [A1.3] erhalten wir die Behauptung von Theorem 1.

Beweis von Theorem 2

a) Sei $\vec{x} \in C(v)$. Dann gilt: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ für jede Koalition S.

Angenommen, es gebe eine Auszahlung $\vec{y}$, die $\vec{x}$ bezüglich einer Koalition S dominiert. Es gelte also:

$$\sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

Die Koalition S kann demnach ihren Anteil von $\vec{y}$ nicht durchsetzen. Dies widerspricht der Voraussetzung der Dominanz von $\vec{y}$ über $\vec{x}$.

b) Es gebe keine Koalition S und keine Auszahlung $\vec{y}$ mit $\vec{y} \succ_S \vec{x}$. Nehmen wir nun an, $\vec{x}$ läge nicht in C(v). Dann gilt für mindestens eine Koalition S_1: $\sum_{i \in S_1} x_i < v(S_1)$. Betrachten wir die Auszahlung $\vec{y}$:

$$y_i = x_i + \frac{1}{|S_1|}\left(v(S_1) - \sum_{i \in S_1} x_i\right),$$

wobei $|s_1|$ die Anzahl der Mitglieder von S_1 bedeutet. Es gilt: $y_i > x_i$ für alle $i \in S$ und $\sum_{i \in S} y_i = v(S)$, also $y \succ_S x$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Beweis von Theorem 3 (TACK 1973)

a) Sei $\vec{x} \in C(v)$. Dann gilt:

$$x_1 + x_2 \geq v_{12},$$
$$x_1 + x_3 \geq v_{13},$$
$$x_2 + x_3 \geq v_{23}.$$

Addieren wir diese drei Ungleichungen, so erhalten wir:

$$2(x_1+x_2+x_3) \geq v_{12}+v_{13}+v_{23}.$$

Wegen $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$ für alle $\vec{x} \in C(v)$ folgt:

$$2v_{123} \geq v_{12}+v_{13}+v_{23}.$$

b) Es gelte

[A3.1] $2v_{123} \geq v_{12}+v_{13}+v_{23}$.

Betrachten wir die Auszahlung $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ mit:

$x_1 = \min(v_{12}-v_2, v_{123}-v_{23})$

$x_2 = v_{12}-x_1$

$x_3 = v_{123}-x_1-x_2$.

Es gilt sicher: $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$.

Fall 1:

[A3.2] $v_{12}-v_2 \leq v_{123}-v_{23}$.

In diesem Fall ist

$x_1 = v_{12}-v_2$, $x_1+x_2 = v_{12}$

$x_2 = v_2$, $x_1+x_3 = v_{123}-v_2$

$x_3 = v_{123}-v_{12}$, $x_2+x_3 = v_{123}-v_{12}+v_2 \geq v_{23}$ wegen [A2.3].

Wegen der Superadditivität von v gilt damit:

$x_i \geq v_i$ und $x_i+x_j \geq v_{ij}$.

Fall 2:

[A3.3] $v_{12}-v_2 > v_{123}-v_{23}$.

Hier ist

$x_1 = v_{123}-v_{23}$ $x_1+x_2 = v_{12}$

$x_2 = v_{12} - (v_{123}-v_{23}) > v_2$ wegen [A3.3] $x_1+x_3 = 2v_{123}-v_{12}-v_{23} \geq v_{13}$ wegen [A3.1]

$x_3 = v_{123}-v_{12}$ $x_2-x_3 = v_{23}$.

Wegen der Superadditivität von v gilt wieder:

$x_i \geq v_i$ und $x_i+x_j \geq v_i-v_j$.

Beweis von Theorem 4 (TAK 1973)

a) Sei C(v) einelementig. Dann gilt für das einzige Element $\vec{a} \in C(v)$:

[A4.1] $a_1+a_2 = v_{12}$,

$a_1+a_3 = v_{13}$,

$a_2+a_3 = v_{23}$,

denn wäre etwa $a_1+a_2 = v_{12}+c > v_{12}$, so läge $\vec{a}' \neq \vec{a}$ mit

$$a_1' = a_1 + \frac{c}{2}\,, \quad a_2' = a_2 + \frac{c}{2}\,, \quad a_3' = a_3$$

entgegen unserer Voraussetzungen auch im Kern von v. Auflösung des Gleichungssystems [A4.1] führt auf Behauptung [14.13] und Addition der drei Gleichungen unter Berücksichtigung von $a_1+a_2+a_3 = v_{123}$ auf [14.12].

b) Es gelte:

[14.12] $v_{123} = 1/2(v_{12}+v_{13}+v_{23})$

Dann liegt die durch [14.13] bestimmte Auszahlung $\vec{a}$ wegen

$$a_i = 1/2(v_{ij}+v_{ik}-v_{jk}) = v_{123}-v_{jk} \geq v_i \text{ und } a_i+a_j = v_{ij}$$

im Kern von v. Angenommen, es läge noch eine zweite Auszahlung $\vec{a}' \neq \vec{a}$ in C(v). Dann müsste wegen $\vec{a}' \neq \vec{a}$ für zumindest ein Indexpaar, etwa (1,2) gelten: $a_1'+a_2' > v_{12}$

und wegen $\vec{a}' \in C(v)$ müsste weiterhin $a_1+a_3 \geq v_{13}$ und $a_2+a_3 \geq v_{23}$ erfüllt sein. Addition dieser drei Ungleichungen ergibt unter Berücksichtigung von $a_1+a_2+a_3 = v_{123}$:

$$2v_{123} > v_{12}+v_{13}+v_{23}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Beweis von Theorem 5

a) Für Konstantsummenspiele gilt:

$$x_i+x_j \leq v_{123}-v_k = v_{ij} \quad i,j,k = 1,2,3 \quad i\neq j\neq k$$

für alle Imputationen $\vec{x}$.

Daher gilt: $I(v) \subseteq Z(v)$.

Da per definitionem $Z(v) \subseteq I(v)$ gilt, folgt Behauptung a.

b) Der Kern eines einelementigen Spiels enthält nur die durch [14.13] bestimmte Auszahlung $\vec{a}$.

Wegen $a_i+a_j = v_{ij}$ $i,j = 1,2,3$ $i\neq j$ liegt $\vec{a}$ in Z(v),

Sei nun $\vec{x} \neq \vec{a}$ eine Imputation, also insbesondere

$$x_1+x_2+x_3 = a_1+a_2+a_3 = v_{123}.$$

Dann gibt es mindestens ein Indexpaar (i,j) mit

$$x_i+x_j > a_i+a_j = v_{ij}.$$

$\vec{x}$ liegt also nicht in $Z(v)$.

c) Für Spiele mit nichteinelementigem Kern gilt entweder

[A5.1] $$2v_{123} \geq v_{12}+v_{13}+v_{23}$$

oder

[A5.2] $$2v_{123} < v_{12}+v_{13}+v_{23}.$$

Fall 1: Gelte [A5.1]

Dann ist der Kern nicht leer.
Sei $Z \neq 0$. Es existiert also mindestens eine Imputation $\vec{x}$ mit

$$v_{123}-x_3 = x_1+x_2 \leq v_{12}$$

$$v_{123}-x_2 = x_1+x_3 \leq v_{13}$$

$$v_{123}-x_1 = x_2+x_3 \leq v_{23}.$$

Addition dieser 3 Gleichungen ergibt wegen $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$

$$2v_{123} \leq v_{12}+v_{13}+v_{23}$$

im Widerspruch zu Voraussetzung [A5.1]

Fall 2: Gelte [A5.2]

Dann ist der Kern leer. Betrachten wir eine Auszahlung $\vec{b}$ mit

$$b_1 = 1/3(v_{123}+v_{12}+v_{13}-2v_{23})$$

$$b_2 = 1/3(v_{123}+v_{12}+v_{23}-2v_{13})$$

$$b_3 = 1/3(v_{123}+v_{13}+v_{23}-2v_{12}).$$

Wie man leicht sieht, ist $b_1+b_2+b_3 = v_{123}$. Voraussetzung [A5.2] lässt sich umformen zu

[A5.3] $$v_{ij}+v_{ik} > 2v_{123}-v_{jk} \qquad i,j,k = 1,2,3 \quad i\neq j\neq k$$

Daraus folgt für jedes i:

$$b_i = 1/3(v_{123}+v_{ij}+v_{ik}-2v_{jk}) > v_{123}-v_{jk} \geq v_i.$$

$\vec{b}$ ist also Imputation.

Durch paarweise Addition der Komponenten erhalten wir

[A5.4] $$b_i+b_j = 1/3(2v_{123}-2v_{ij}-v_{ik}-v_{jk})$$

Wegen [A5.3] gilt

[A5.5] $$-v_{ik}-v_{jk} < -2v_{123}+v_{ij}.$$

Addieren wir [A5.4] zu [A5.5] , so ergibt sich

$$b_i+b_j < 1/3(3v_{ij}) = v_{ij} \quad i,j = 1,2,3 \quad i\neq j.$$

$\vec{b}$ liegt also in z(v),

Beweis von Theorem 6

a folgt aus c. Deshalb beweisen wir c zuerst.

c) Für Spiele ohne Kern gilt nach Theorem 3:

[A6.1] $$2v_{123} < v_{12}+v_{13}+v_{23}.$$

Die Grösse h_1 lässt sich umformen zu

$$h_1 = v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123}+v_{123}-v_{23}-v_1 \geq 0.$$

Entsprechendes gilt für h_2 und h_3.

Daher ist $J = \emptyset$ und

$$m(v) = \frac{v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123}}{v_{123}-v_1-v_2-v_3}.$$

Mit [A6.1] folgt : $m(v) > 0$.

Aus der Superadditivität von v schliessen wir:

$$3v_{123} \geq v_{12}+v_3+v_{13}+v_2+v_{23}+v_1, \quad \text{also}$$

$v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123} \leq v_{123}-v_1-v_2-v_3$. Damit gilt: $m(v) \leq 1$.

Für Spiele mit Kern gilt nach Theorem 3:

[A6.2] $$2v_{123} \geq v_{12}+v_{13}+v_{23}.$$

Fall 1: Sie $J = \emptyset$. Dann gilt wegen [A6.2] : $m(v) \leq 0$.

Weiter ergibt Addition von

$$h_1 \geq 0,\ h_2 \geq 0 \text{ und } h_3 \geq 0$$

[A6.3] $$2(v_{12}+v_{13}+v_{23})-3v_{123} - v_1+v_2+v_3$$

Addieren wir [A6.2] und [A6.3], so erhalten wir

$$v_{12}+v_{13}+v_{23}-v_{123} \geq v_1+v_2+v_3$$

und daraus durch Umformung

$$m(v) = \frac{v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123}}{v_{123}-v_1-v_2-v_3} - 1.$$

Fall 2: Sei $J = \{1\}$. Subtrahieren wir das dreifache von A6.2 von $v_1+v_{23}-v_{123} \leq 0$, so erhalten wir

$$3(v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123})-v_{12}-v_{13}+v_{123}+v_1 \leq 0.$$

Damit ist der Zähler von m(v) negativ. Da der Nenner für alle wesentli
Spiele positiv ist, gilt: $m(v) \leq 0$.
Addieren wir $h_2 \geq 0$, $h_3 \geq 0$ und

[A6.4] $$v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_1-2v_2-2v_3 \geq 0,$$

so erhalten wir

$$3(v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123})-(v_{12}+v_{13}-v_{123}-v_1) \geq 3(v_1+v_2+v_3-v_{123}),$$

demnach $m(v) \geq -1$.

Fall 3: Sei $J = \{1,2\}$. In diesem Fall lässt sich der Zähler von m(v) umformen zu

$$(v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123})+(v_1+v_{23}-v_{123})+(v_2+v_{13}-v_{123})$$

Wegen [A6.2] und der Superadditivität von v ist dieser Ausdruck kleiner oder gleich 0. Deshalb ist auch $m(v) \leq 0$.

Addition von $h_3 > 0$ mit [A6.4] ergibt:

$$-v_{123}+v_{12}+2v_{13}+2v_{23}-2v_1-2v_2-3v_3 \geq 0.$$

Umformung führt auf $m(v) \geq -1$.

Fall 4: Sei $J = \{1,2,3\}$. Hier ist der Zähler von $m(v)$ gleich

[A6.5] $$v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123}+v_1+v_2+v_3-v_{123} \leq 0,$$

also $m(v) \leq 0$. Wegen A6.4 ist der Ausdruck in [A6.5] grösser oder gleich $3(v_1+v_2+v_3-v_{123})$, und daher $m(v) \geq -1$.

Damit ist Behauptung c bewiesen.

b) Wesentliche Konstantsummenspiele enthalten wegen

[A6.6] $$v_{12}+v_{13}+v_{23} = 3v_{123}-v_1-v_2-v_3 > 2v_{123}$$

nach [A6.1] keinen Kern. Wie eben gezeigt, folgt hieraus $J = \emptyset$, also

$$m(v) = \frac{v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123}}{v_{123}-v_1-v_2-v_3} = 1 \quad \text{wegen [A6.6]}$$

Für Spiele mit einelementigem Kern gilt Gleichung [14.12] und daher

$$h_1 = v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123}-v_{23}+v_{123}-v_1 \geq 0;$$

entsprechend: $h_2 \geq 0$ und $h_3 \geq 0$, also $J = \emptyset$.

Mit Gleichung [14.12] folgt nun $m(v) = 0$.

Für Spiele, in denen jede Imputation zum Kern gehört, gilt: Aus $x_i \geq v_i$ für jedes i folgt $x_i+x_j \geq v_{ij}$, d.h. $v_{ij} \leq v_i+v_j$ für alle $i,j = 1,2,3$ mit $i \neq j$.

Wegen der Superadditivität von v ist aber $v_{ij} \geq v_i+v_j$,

deshalb muss

$$[A6.6'] \qquad v_{ij} = v_i + v_j \quad \text{für } i,j = 1,2,3 \; i \neq j$$

gelten. Damit ist die Negativität von h_i $(i = 1,2,3)$ gesichert. Unter Berücksichtigung von [A6.6'] ergibt dies

$$m(v) = -1.$$

Damit ist auch Behauptung b bewiesen.

d_1) Wegen

$$[A6.7] \qquad v_i = v'_i$$

und

$$[A6.8] \qquad v_{123} = v'_{123}$$

ist die Behauptung $m(v) > m(v')$ äquivalent der Behauptung

$$[A6.9] \qquad 3(v_{12}-v'_{12}+v_{13}-v'_{13}+v_{23}-v'_{23}) - \sum_{j \in J} h_j + \sum_{j \in J'} h'_j > 0.$$

Aus $K(v) \subset K(v')$ folgt mit [A6.7] und [A6.8]

$$[A6.10] \qquad v_{12} \geq v'_{12} \quad v_{13} \geq v'_{13} \quad v_{23} \geq v'_{23}$$

und für mindestens ein Paar (i,j):

$$[A6.11] \qquad v_{ij} > v'_{ij}.$$

Daher ist $h_i \geq h'_i$ $(i = 1,2,3)$ und $J \subseteq J'$. Die beiden Summen in [A6.9] lassen sich zerlegen in

$$\sum_{j \in J} (-h_j + h'_j) + \sum_{i \in J'-J} h'_i = \sum_{j \in J} (v'_{jk} + v'_{j1} - v_{jk} - v_{j1}) + \sum_{i \in J'-J} (v_{ik} + v_{i1} - v_{123} - v_i)$$

Fall 1: Sei $J = \emptyset$, $J'-J = \{1,2,3\}$. Der Ausdruck auf der linken Seite von [A6.9] wird hier gleich

$$3v(v_{12}+v_{13}+v_{23}) - v'_{12} - v'_{13} - v'_{23} - 3v'_{123} - v_1 - v_2 - v_3.$$

Wegen $J = \emptyset$ gilt : $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$, $h_3 \geq 0$. Durch Addition

erhalten wir

$$2(v_{12}+v_{13}+v_{23}) \geq 3v_{123}+v_1+v_2+v_3 \quad \text{und mit}$$

$v_{ij} \geq v'_{ij}$ und $v_{123} = v'_{123}$ folgt Behauptung [A6.9].

Fall 2: Sei $J = \{1,2,3\}$ und $J-J = \emptyset$. Der Ausdruck auf der linken Seite von [A6.9] vereinfacht sich zu

$$3(v_{12}-v'_{12}+v_{13}-v'_{13}+v_{23}-v'_{23}) - \sum_{j\in J} h_j.$$

Wegen [A6.10] ist die Klammer grösser als 0 und wegen $J = \{1,2,3\}$ sind alle $h_j < 0$. Daher gilt Behauptung [A6.9].

Die übrigen Fälle werden entsprechend bewiesen.

d_2) Sei $\emptyset \neq Z(v) \subset Z(v')$. Dann haben die Spiele v und v' einen leeren oder höchstens einelementigen Kern (Theorem 1). Wie unter b gezeigt, sind damit J und J' leer. Es gilt

$$m(v) = \frac{v_{12}+v_{13}+v_{23}-2v_{123}}{v_{123}-v_1-v_2-v_3} \quad \text{und} \quad m(v') = \frac{v'_{12}+v'_{13}+v'_{23}-2v'_{123}}{v'_{123}-v'_1-v'_2-v'_3}.$$

$Z(v) \subset Z(v')$ bedeutet

Aus $x_i+x_j \leq v_{ij}$ folgt $x_i+x_j \leq v'_{ij}$, also

[A6.12] $\quad v_{ij} \leq v'_{ij}$ für $i,j = 1,2,3 \quad i \neq j$.

Daraus folgt unmittelbar $m(v) < m(v')$.

e) Seien v und v' strategisch äquivalent. Setzen wir

$$v'_i = c(v_i+a_i)$$

$$v'_{ij} = c(v_{ij}+a_i+a_j)$$

$$v'_{123} = c(v_{123}+a_1+a_2+a_3)$$

in h_i ein, so erhalten wir $h_i(v') = c \cdot h_i(v)$. Wegen $c > 0$ ist demnach $h_i(v) < 0$ äquivalent zu $h_i(v') < 0$, d.h. $J = J'$.

Da der Faktor c sich im Zähler und Nenner von m(v) wegkürzt, sind die Masse von v und v' gleich.

Beweis von Theorem 7 (LICHTENBERGER und SONDERMANN 1973)

Für ein Drei-Personen-Spiel gibt es höchstens sechs mögliche Einwände bezüglich einer gegebenen Imputation $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$, die mit einem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ folgendermassen aufgelistet werden können:

a) Einwand von 1 gegen 2 mit $(x_1+\varepsilon,-,v_{13}-x_1-\varepsilon)$, falls $x_1+x_3 < v_{13}$
b) Einwand von 1 gegen 3 mit $(x_1+\varepsilon,v_{12}-x_1-\varepsilon,-)$, falls $x_1+x_2 < v_{12}$
c) Einwand von 2 gegen 1 mit $(-,x_2+\varepsilon,v_{23}-x_2-\varepsilon)$, falls $x_2+x_3 < v_{23}$
d) Einwand von 2 gegen 3 mit $(v_{12}-x_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon,-)$, falls $x_1+x_2 < v_{12}$
e) Einwand von 3 gegen 1 mit $(-,v_{23}-x_3-\varepsilon,x_3+\varepsilon)$, falls $x_2+x_3 < v_{23}$
f) Einwand von 3 gegen 2 mit $(v_{13}-x_3-\varepsilon,-,x_3+\varepsilon)$, falls $x_1+x_3 < v_{13}$.

Da v superadditiv ist, kann keine einelementige Koalition einen Gegeneinwand gegen diese Einwände bringen. Deshalb haben die einzigen möglichen Gegeneinwände die folgende Form:

zu a) $(-,x_2,v_{23}-x_2)$, falls $v_{23}-x_2 \geq v_{13}-x_1$
zu b) $(-,v_{23}-x_3,x_3)$, falls $v_{23}-x_3 \geq v_{12}-x_1$
zu c) $(x_1,-,v_{13}-x_1)$, falls $v_{13}-x_1 \geq v_{23}-x_2$
zu d) $(v_{13}-x_3,-,x_3)$, falls $v_{13}-x_3 \geq v_{12}-x_2$
zu e) $(x_1,v_{12}-x_1,-)$, falls $v_{12}-x_1 \geq v_{23}-x_3$
zu f) $(v_{12}-x_2,x_2,-)$, falls $v_{12}-x_2 \geq v_{13}-x_3$.

Beweis von Behauptung a

Es ist klar, dass C(v) eine Teilmenge von M(1,2,3) ist, da gegen Auszahlungen aus C(v) kein Einwand möglich ist. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, betrachten wir eine Imputation $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$, die zu M(1,2,3), aber nicht zu C(v) gehört. Aus $\vec{x} \notin C(v)$ folgt, dass mindestens eine Zweierkoalition, etwa (1,2) existiert, die weniger als ihren Wert erhält:

[A7.1] $$v_{12} > x_1+x_2.$$

Daher sind die Einwände b und d möglich. Wegen $\vec{x} \in M(1,2,3)$ muss es zu jedem dieser Einwände einen gerechtfertigten Gegeneinwand geben.

Dies impliziert:

A7.2 $$v_{23}-x_3 \geq v_{12}-x_1,$$

A7.3 $$v_{13}-x_3 \geq v_{12}-x_2.$$

Addieren wir [A7.2], [A7.3] und drei mal [A7.1], so erhalten wir

[A7.4] $$v_{12}+v_{23}+v_{13} > 2(x_1-x_2-x_3) = 2v_{123}.$$

Nach Theorem 3 steht dies im Widerspruch zur Annahme eines nichtleeren Kerns.

Beweis von Behauptung b

Da v einen leeren Kern hat, gilt nach Theorem 3:

$$2v_{123} < v_{12}+v_{13}+v_{23}$$

oder

$$v_{ij}+v_{ik} > 2v_{123}-v_{jk}.$$

Daher gilt für die durch [152] bestimmte Auszahlung $\vec{x}$:

$$x_i = 1/3(v_{123}+v_{ij}+v_{ik}-2v_{jk}) > v_{123}-v_{jk} > v_i.$$

Da zusätzlich $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$ gilt, ist $\vec{x}$ Imputation.

Betrachten wir nun ein beliebiges Element $\vec{x} \in M(1,2,3)$. Da der Kern von v leer ist, gibt es mindestens eine Zweierkoalition, sagen wir (1,2) mit:

[A7.5] $$x_1+x_2 < v_{12}.$$

Die Einwände b und d sind also möglich. Wegen $\vec{x} \in M(1,2,3)$ müssen dazu gerechtfertigte Gegenstände existieren, was die Gültigkeit folgender Ungleichungen bedingt:

[A7.6] $$v_{23}-x_3 \geq v_{12}-x_1$$

und

[A7.7] $$v_{13}-x_3 \geq v_{12}-x_2.$$

[A7.5] und [A7.6] implizieren aber:

[A7.8] $$x_2+x_3 < v_{23}.$$

Entsprechend implizieren [A7.5] und [A7.7]:

[A7.9] $$x_1+x_3 < v_{13}.$$

[A7.5], [A7.8] und [A7.9] zeigen, dass alle sechs möglichen Einwände erhoben werden können. Wegen $\vec{x} \in M(1,2,3)$ müssen auch alle sechs Gegeneinwände möglich sein. Dies bedeutet, dass $\vec{x}$ folgenden Gleichungen genügen muss:

[A7.10] $v_{23}-x_2 = v_{13}-x_1$,

[A7.11] $v_{23}-x_3 = v_{12}-x_1$,

[A7.12] $v_{13}-x_3 = v_{12}-x_2$.

Dieses Gleichungssystem liefert zusammen mit der Forderung $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$ die durch [15.2] bestimmte Auszahlung.

Beweis von Theorem 8

Angenommen, die Fallunterscheidung wäre nicht vollständig.
Es gelte etwa: $v_{12} \geq v_{13}+v_{23}-2v_3$ und

$$v_{13} \geq v_{12}+v_{23}-2v_2 .$$

Durch Addition folgt:

$$0 \geq 2(v_{23}-v_2-v_3)$$

im Widerspruch zur Superadditivität der charakteristischen Funktion.

Beweis von Fall a

Behauptung 1: Die durch [15.4] definierte Menge M(1,2) ist gleich dem Bargaining Set für die Koalition (1,2).

1.) Sei $\vec{x} \in M(1,2)$. Genau dann gilt:

$$x_1+x_2 = v_{12} , x_3 = v_3,$$

[A8.1] $x_1+x_3 \geq v_{13}$

und

[A8.2] $x_2+x_3 = v_{12}+x_3-x_1 \geq v_{23}$.

Wegen der Koalitionsstruktur sind höchstens die Einwände a und c möglich (siehe Beweis von Theorem 7), aber wegen [A8.1] und [A8.2] kommen auch diese Einwände nicht in Frage. Da demnach kein Einwand gegen $\vec{x}$ möglich ist, liegt $\vec{x}$ im Bargaining Set von (1,2).

2.) Angenommen, es gebe eine Auszahlung $\vec{x}$, welche im Bargaining Set der Koalition (1,2), aber nicht in M(1,2) liegt. Es gilt sicher:

[A8.3] $x_1+x_2 = v_{12}$.

Entweder es ist kein Einwand gegen $\vec{x}$ möglich; in diesem Fall muss $x_1+x_3 \geq v_{13}$ und $x_2+x_3 \geq v_{23}$ gelten. Mit [A8.1] und [A8.2] folgt nun $\vec{x} \in M(1,2)$ entgegen de Voraussetzung,

oder es ist ein Einwand möglich. Sei dies Einwand a. Es gilt also:

[A8.4] $x_1+x_3 < v_{13}$.

Da $\vec{x}$ nach Voraussetzungen im Bargaining Set von (1,2) liegt, muss auch der Gegeneinwand zu a möglich sein. Daher gilt:

[A8.5] $v_{23}-x_2 \geq v_{13}-x_1$.

Addieren wir [A8.3] zu [A8.5] und subtrahieren davon das doppelte von [A8.4], so erhalten wir unter Berücksichtigung von $x_3 = v_3$:

$$v_{12} < v_{13}+v_{23}-2v_3$$

im Widerspruch zu Voraussetzung [15.3].

Behauptung 2: Die durch [15.5] definierte Menge M(1,3) ist gleich dem Bargaining Set für die Koaltion (1,3).

1.) Sei $\vec{x} \in M(1,3)$. Dann gilt:

[A8.6] $x_1 = 1/2(v_{12}+v_{13}-v_{23})$

und

[A8.7] $x_3 = 1/2(v_{13}+v_{23}-v_{12})$.

Subtraktion der Gleichung[A8.7] von [A8.6] und umordnen ergibt:

[A8.8] $v_{23}-x_3 = v_{12}-x_1$.

Aufgrund der Koalitionsstruktur sind höchstens die Einwände b und e gegen $\vec{x}$ möglich. Wegen [A8.8] gibt es zu diesen Einwänden aber Gegeneinwände. $\vec{x}$ liegt demnach im Bargaining Set von (1,3).

2.) Sei $\vec{x}$ ein Element des Bargaining Set von (1,3). Dann gilt sicher:

[A8.9] $x_1+x_3 = v_{13}$, $x_2 = v_2$.

Es ergeben sich vier Möglichkeiten:

a) Einwände b und e unmöglich.

Mit $x_2 = v_2 \geq$ folgt

[A8.10] $x_1+v_2 \geq v_{12}$

und

[A8.11] $v_2+x_3 \geq v_{23}$.

Addieren wir [A8.10] und [A8.11], so erhalten wir:

[A8.12] $x_1+x_3 \geq v_{12}+v_{23}-2v_2 \geq 2v_{23}-2v_2-2v_3+v_{13} \geq v_{13}$ wegen [15.3].

Wegen [A8.9] muss in [A8.12] die Gleichheit der beiden mittleren Terme gelten. Dies gilt aber nur, wenn die Gleichheit auch schon in [A8.10] und [A8.11] erfüllt ist, wenn also

$$x_1+v_2 = v_{12} \quad \text{und} \quad x_3+v_2 = v_{23}$$

gelten. Zusammen mit [A8.9] folgt damit

$$x_1 = 1/2(v_{12}+v_{13}-v_{23})$$

$$x_3 = 1/2(v_{13}+v_{23}-v_{12}) \ .$$

b) Einwand b und Gegeneinwand zu b möglich,
Einwand e unmöglich.
Hier gilt wegen $x_2 = v_2$:

[A8.12] $x_1+v_2 \leq v_{12}$,

[A8.13] $v_{23}-x_3 \geq v_{12}-x_1$ und

[A8.14] $v_2+x_3 \geq v_{23}$.

Addition der beiden letzteren Ungleichungen führt auf:

$$v_2 \geq v_{12}-x_1$$

im Widerspruch zu [A8.12]. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

c) Einwand e möglich und Gegeneinwand zu e möglich,
Einwand b unmöglich
kann genau wie Fall b nicht eintreten.

d) Einwände und Gegeneinwände zu b und e möglich
heisst insbesondere:

$$v_{23}-x_3 \geq v_{12}-x_1 \quad \text{und} \quad v_{12}-x_1 \geq v_{23}-x_3, \text{ also}$$

$$v_{23}-x_3 = v_{12}-x_1.$$

Mit $x_1+x_3 = v_{12}$ ergibt sich hieraus wieder:

$$x_1 = 1/2(v_{12}+v_{13}-v_{23})$$

$$x_3 = 1/2(v_{13}+v_{23}-v_{12}).$$

Genau wie der Beweis von Behauptung 2 läuft der Beweis zu M(2,3).

Beweis von Fall b

1.) Der Beweis, dass z.B. M(1,3) im Bargaining Set der Koalition (1,3) liegt, läuft analog zu Teil 1 des Beweises von Behauptung 2 des Falls a .

2.) Sei nun $\vec{x}$ ein Element des Bargaining Set von (1,3). Genau wie in Teil 2 des Beweises von Fall a, Behauptung 2, ergeben sich die vier Möglichkeiten a,b,c,d, wobei b und d aus den eben genannten Gründen nicht eintreten können.

a) Seien die Einwände b und e unmöglich.
Dann gilt [A8.9], [A8.10] und [A8.11]. Angenommen, in [A8.10] oder [A8.11] gelte die echte Ungleichheit. Addition von [A8.10] und [A8.11] ergibt dann unter Berücksichtigung von [A8.9]:

$$2v_2+v_{13} > v_{12}+v_{23}$$

ein Widerspruch zu [15.7]. Daraus schliessen wir die Ungleichheit in [A8.10] und [A8.11] und mit [A8.9]:

$$x_1 = 1/2(v_{12}+v_{13}-v_{23})$$
$$x_3 = 1/2(v_{13}+v_{23}-v_{12}).$$

d) Der Beweis bei Möglichkeiten beider Einwände und Gegeneinwände läuft genau wie der entsprechende Beweis von Fall a.

Die Beweise für M(1,2) und M(2,3) ergeben sich durch Indexpermutation aus dem Beweis für M(1,3).

Beweis von Theorem 9

Die Koalition S = (i,j) kann v_{ij} durchsetzen, daher gilt: $x_i+x_j = v_{ij}$. Es gibt hier nur zwei relevante Exzesse, $e_i(\vec{x})$ und $e_j(\vec{x})$. Wegen

$$e_i(\vec{x}) + e_j(\vec{x}) = v_i-x_i+v_j-x_j = v_i+v_j-v_{ij}$$

wird das Minimum der beiden Exzesse maximal für $e_i(\vec{x}) = e_j(\vec{x})$,

das heisst:

$$v_i - x_i = v_j - x_j.$$

Zusammen mit $x_i + x_j = v_{ij}$ folgt

$$x_i = v_i + 1/2(v_{ij} - v_i - v_j),$$
$$x_j = v_j + 1/2(v_{ij} - v_i - v_j).$$

Beweis von Theorem 10

Der Beweis vereinfacht sich, wenn wir im reduzierten System arbeiten (siehe § 13).

$$\text{Wegen } e_S(\vec{x}) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i = 1/c \cdot v'(S) - \sum_{i \in S} a_i - 1/c \cdot \sum_{i \in S} x'_i + \sum_{i \in S} a_i$$

$$= 1/c(v'(S) - \sum_{i \in S} x'_i) =: 1/c \cdot e'_S(\vec{x}')$$

gilt mit $\theta'(v', \vec{x}') := (e'_{S_1}(\vec{x}'), e'_{S_2}(\vec{x}'), \ldots\ldots\ldots e'_{S_7}(\vec{x}'))$

[A10.1] $\theta'(v', \vec{x}') = c \cdot \theta(v, \vec{x})$.

Da $c > 0$ ist, ist folglich $\vec{n}$ Nucleolus des durch v beschriebenen Spiels, falls $\vec{n}'$ Nucleolus des durch v' beschriebenen Spiels ist und umgekehrt.

Wir zeigen nun:

a) Werden die Bedingungen des Satzes und die angegebenen Werte für $\vec{n}$ durch $T_{-1,0}$ transformiert, so erhalten wir Bedingungen und Werte $\vec{n}'$, für die gilt:

   $\vec{n}'$ stellt unter den entsprechend transformierten Bedingungen genau den Nucleolus des Spiels v' dar.

b) Durch Rücktransformation der Nucleoli $\vec{n}'$ und der entsprechenden Bedingungen erhalten wir genau die zu beweisenden Aussagen.

Damit ist dann wegen der Invarianz des Nucleolus bezüglich Äquivalenztransformationen [A10.1] die Behauptung bewiesen.

Der Beweis im normierten (= gestrichenen) System muss für alle Fälle einzeln geführt werden, die Beweisidee ist aber stets die gleiche:

Im ersten Schritt wird gezeigt, dass für den jeweiligen Fall unter den transformierten Bedingungen für den entsprechenden Wert $\vec{n}'$ entweder

a) die drei grössten Exzesse gleich sind

oder

b) die beiden grössten Exzesse gleich und die beiden nächstgrössten auch gleich sind.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass für jede Auszahlung $\vec{y}' \neq \vec{n}'$ gilt:

Falls a zutrifft, ist einer der Exzesse von $\vec{y}'$ grösser als die grössten Exzesse von $\vec{n}'$;

falls b zutrifft, gilt entweder dasselbe oder, wenn die grössten Exzesse von $\vec{y}'$ und $\vec{n}'$ gleich sind, ist zumindest der nächstgrösste Exzess von $\vec{y}'$ grösser als der entsprechende von $\vec{n}'$.

In beiden Fällen ist $\vec{n}'$ die einzige Auszahlung im Nucleolus des normierten Spiels.

Im dritten Schritt wird die Rücktransformation ins ungestrichene System durchgeführt:

Zur Durchführung des Beweises benötigen wir folgenden

Hilfssatz: Wenn $\vec{x}$ im Nucleolus liegt, ist

[A10.2] $$e_{123}(\vec{x}) = 0$$

Beweis des Hilfssatzes

Wegen [12.1] gilt:

$$e_{123}(\vec{x}) \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \in X(v).$$

Angenommen, es gelte

$$e_{123}(\vec{x}) > 0.$$

Mit $\vec{y} = (x_1+r_1, x_2+r_2, x_3+r_3)$ $\qquad r_1+r_2+r_3 = v_{123}-(x_1+x_2+x_3)$

$r_i > 0$ für $i = 1,2,3$

gilt dann

$$e_S(\vec{y}) < e_S(\vec{x}) \qquad \text{für alle } S \subseteq N.$$

$\vec{x}$ liegt also nicht im Nucleolus. q.e.d.

Beweis für Fall 1:

Die Transformation von [16.9] und [16.1o] nach [13.3] ergibt:

[A1o.3] $\qquad v'_{12}+v'_{13}+v'_{23} \geq 0$ $\qquad$ und

[A10.4] $\qquad n'_{11} = 1/3(v'_{12}+v'_{13}-2v'_{23})$

$\qquad n'_{12} = 1/3(v'_{12}-2v'_{13}+v'_{23})$

$\qquad n'_{13} = 1/3(-2v'_{12}+v'_{13}+v'_{23})$

Es gilt

[A10.5] $\qquad e'_{12}(\vec{n}'_1) = v'_{12}-(n'_{11}+n'_{12}) = 1/3(v'_{12}+v'_{13}+v'_{23}) = e'_{13}(\vec{n}'_1) = e'_{23}(\vec{n}'_1)$

und

[A10.6] $\qquad e'_{12}(\vec{n}'_1) \geq 0$ wegen [A10.3] und [A10.5]

Weiter ist

[A10.7] $\qquad e'_1(\vec{n}'_1) = -1-n'_{11} = -1-1/3(v'_{12}+v'_{13}+v'_{23}-3v'_{23}) \leq -1+v'_{23}$ wegen

[A10.3] $\qquad = v'_1+v'_{23} \leq v'_{123} = 0.$

Genauso zeigt man

[A10.8] $\qquad e'_2(\vec{n}'_1) \leq 0$ $\qquad$ und $\qquad e'_3(\vec{n}'_1) \leq 0.$

Fassen wir [A10.5] bis [A1o.8] zusammen, so erhalten wir

[A10.9] $\qquad e'_{12}(\vec{n}'_1) = e'_{13}(\vec{n}'_1) = e'_{23}(\vec{n}'_1) \geq e'_i(\vec{n}'_1) \quad i = 1,2,3$

Für jede Auszahlung $\vec{y}' \neq \vec{n}_1'$ mit

$$y_1'+y_2'+y_3' = v_{123}' = 0 = n_{11}'+n_{12}'+n_{13}'$$

gilt aber

$y_1'+y_2' < n_{11}'+n_{12}'$ oder $y_1'+y_3' < n_{11}'+n_{13}'$ oder $y_2'+y_3' < n_{12}'+n_{13}'$

und damit

$e_{12}'(\vec{y}') > e_{12}'(\vec{n}')$ oder $e_{13}'(\vec{y}') > e_{13}'(\vec{n}')$ oder $e_{23}'(\vec{y}') > e_{23}'(\vec{n}')$.

$\vec{n}_1'$ ist also die einzige Auszahlung im Nucleolus des normierten Spiels.

Die Rücktransformation ergibt:

$$n_{11} = 1/c \cdot n_{11}'-a_1 = 1/3(v_{12}+a_1+a_2+v_{13}+a_1+a_3.2v_{23}-2a_2-2a_3)-a_1$$

$$= 1/3(v_{12}+v_{13}-2v_{23}-a_1-a_2-a_3)$$

$$= 1/3(v_{123}+v_{12}+v_{13}-2v_{23}) \quad \text{wegen } [13.6]$$

Genau so berechnet man n_{12} und n_{13}.

Beweis für Fall 2:

Hier gilt

[A10.10] $v_{12}'+v_{13}'+v_{23}' < 0.$

Die transformierten Hilfsgrössen lauten

[A10.11] $s_1' = -1-v_{12}'-v_{13}'$

$s_2' = -1-v_{12}' \quad -v_{23}'$

$s_3' = -1 \quad -v_{13}'-v_{23}'$

$h' = v_{12}'-v_{13}'-v_{23}'.$

Fall 2.1:

Die Voraussetzungen [16.12] gehen über in

[A10.12] $\quad -3 > 2v'_{12}+2v'_{13}-v'_{23}$

[A10.13] $\quad -3 > 2v'_{12}-v'_{13}+2v'_{23}$

[A10.14] $\quad -3 > -v'_{12}+2v'_{13}+2v'_{23}.$

Fall 2.11: Transformation von [16.13] bis [16.15] ergibt:

[A10.15] $\quad v_{12} \leq -1,\ v_{13} \leq -1,\ v_{23} \leq -1$

und

[A10.16] $\quad n'_{21} = 0$

$\quad n'_{22} = 0$

$\quad n'_{23} = 0.$

Damit gilt:

[A10.17] $\quad e'_1(\vec{n}'_2) = e'_2(\vec{n}'_2) = e'_3(\vec{n}'_2) = -1,$

[A10.18] $\quad e'_{12}(\vec{n}'_2) = v'_{12} \leq -1,$

[A10.19] $\quad e'_{13}(\vec{n}'_2) = v'_{13} \leq -1,$

[A10.20] $\quad e'_{23}(\vec{n}'_2) = v'_{23} \leq -1.$

Zusammengefasst:

[A10.21] $\quad e'_1(\vec{n}'_2) = e'_2(\vec{n}'_2) = e'_3(\vec{n}'_3) \geq \max\{e'_{12}(\vec{n}'_2), e'_{13}(\vec{n}'_2), e'_{23}(\vec{n}'_2)\}.$

Da für jede Auszahlung $\vec{y}' \neq \vec{n}'_2$ mit

$$y'_1+y'_2+y'_3 = n'_{21}+n'_{22}+n'_{33} = 0$$

für mindest eine Komponente i, (i = 1,2 oder 3)

$$y'_i < n'_{2i}$$

ist, ist $\vec{n}'_2$ also Nucleolus des transformierten Spiels.

Nach kurzer Rechnung erhält man für die rücktransformierte Grösse $\vec{n}_2$ unter Zuhilfenahme von [13.1] und [13.3] den Wert aus [16.16].

Fall 2.12: Transformation von [16.17] und [16.18] ergibt:

[A10.22] $v'_{12} \geq -1, \quad v'_{13} \leq -1, \quad v'_{23} \leq -1$

und

[A10.23] $n'_{31} = 1/4(v'_{12}+1)$

$n'_{32} = 1/4(v'_{12}+1)$

$n'_{33} = 1/2(v'_{12}+1).$

Es gilt:

[A10.24] $e'_1(\vec{n}'_3) = -1-n'_{31} = -1-n'_{32} = e'_2(\vec{n}'_3)$

und

[A10.25] $e'_3(\vec{n}'_3) = -1-n'_{33} = -1/2 + v'_{12} - 1/2 = v'_{12} - 1/2(v'_{12}+1) = e_{12}(\vec{n}'_3).$

Weiterhin gilt wegen $v'_{12} \geq -1$

[A10.26] $e'_1(\vec{n}'_3) = -1-1/4(v'_{12}+1) \leq -1+1/2(v'_{12}+1) = e'_3(n'_3).$

Wegen [A10.22] ist

$v'_{12} \geq -1 \geq v'_{23}.$

Addition mit [A10.12] ergibt

$-3 > v'_{12}+2v'_{13}.$

Durch Multiplikation mit 1/2 und umordnen erhalten wir

$-1-1/4(v'_{12}+1) > v'_{13}+1/4(v'_{12}+1),$

also

[A10.27] $e'_1(\vec{n}'_3) > e'_{13}(\vec{n}'_3),$

Genauso zeigt man mit Hilfe von

$v'_{12} \geq v'_{13}$

und [A10.13]

[A10.28] $e'_2(\vec{n}'_3) > e'_{23}(\vec{n}'_3).$

Fassen wir [A10.26] bis [A10.28] zusammen, so erhalten wir

[A10.29] $e'_{12}(\vec{n}'_3) = e'_3(\vec{n}'_3) \geq e'_1(\vec{n}'_3) = e'_2(\vec{n}'_3) > \max\{(e'_{13}(\vec{n}'_3), e'_{23}(\vec{n}'_3)\}.$

Sei nun $\vec{y}' \neq \vec{n}'_3$ wieder eine Auszahlung mit

[A10.30] $y'_1+y'_2+y'_3 = n'_{31}+n'_{32}+n'_{33} = 0.$

Dann ist entweder

$$y'_3 < n'_{33}, \text{ also } e'_3(\vec{y}') > e_3(\vec{n}'_3)$$

oder

$$y'_3 > n'_{33}, \text{ also } y'_1+y'_2 < n'_{31}+n'_{32} \text{ und damit } e'_{12}(\vec{y}') > e'_{12}(\vec{n}'_3)$$

oder

$$y'_3 = n'_{33}.$$

In diesem Fall ist wegen [A10.30]

$$y'_1+y'_2 = n'_{31}+n'_{32}, \text{ und demnach}$$

$$e'_3(\vec{y}') = e'_3(\vec{n}'_3) \text{ und } e'_{12}(\vec{y}') = e'_{12}(\vec{n}'_3).$$

Weil $\vec{y}' \neq \vec{n}'_3$ ist, folgt aber

entweder $y'_1 < n'_{31}$, also $e'_1(\vec{y}') > e'_1(\vec{n}'_3)$

oder $y'_2 < n'_{32}$, also $e'_2(\vec{y}') > e'_2(\vec{n}'_3)$.

Nach der Definition der lexikographischen Ordnung ist $\vec{n}'_3$ also Nucleolus des normierten Spiels.

Die Rücktransformation ergibt nach kurzer Rechnung die in [16.18] angeführten Werte für $\vec{n}_3$.

Fall 2.2:

Sei nun

$$s_1 \leq h/3, \quad s_2 \leq h/3, \quad s_3 \leq h/3,$$

also

[A10.31] $-3 \leq 2v'_{12}+2v'_{13}-v'_{23}$

[A10.32] $-3 \leq 2v'_{12}-v'_{13}+2v'_{23}$

[A10.33] $-3 \leq v'_{12}+2v'_{12}+2v'_{23}$

und

[A10.34] $n'_{11} = 1/3(v'_{12}+v'_{13}-2v'_{23})$

$n'_{12} = 1/3(v'_{12}-2v'_{13}+v'_{23})$

$n'_{23} = 1/3(-2v'_{12}+v'_{13}+v'_{23})$

Durch einsetzen erhalten wir unmittelbar

[A10.35] $e'_{12}(\vec{n}'_1) = e'_{13}(\vec{n}'_1) = e'_{23}(\vec{n}'_1)$.

Aus [A10.31] folgt

$$-3-(v'_{12}+v'_{13}-2v'_{23}) \leq 3v'_{23}-(v'_{12}+v'_{23}-2v'_{13})-(-2v'_{12}+v'_{13}+v'_{23})$$

demnach

[A10.36] $e'_1(\vec{n}'_1) \leq e'_{23}(\vec{n}'_1)$.

Ebenso schliessen wir aus [A10.32] und [A10.33]

[A10.37] $e'_2(\vec{n}'_1) \leq e'_{13}(\vec{n}'_1)$

und

[A10.38] $e'_3(\vec{n}'_1) \leq e'_{12}(\vec{n}'_1)$.

Zusammengefasst:

[A10.39] $e'_{12}(\vec{n}'_1) = 3'_{13}(\vec{n}'_1) = e'_{23}(\vec{n}'_1) \geq e'_i(\vec{n}'_1) \quad i = 1,2,3.$

Der weitere Beweis läuft wie in [A10.9] f.f..

Fall 2.3:

In diesem Fall bestimmen die Voraussetzungen folgende Ungleichungen im transformierten System:

[A10.40] $-3 < 2v'_{12}+2v'_{13}-v'_{23}$

[A10.41] $-3 \geq 2v'_{12}-v'_{13}+2v'_{23}$

[A10.42] $-3 \geq -v'_{12}+2v'_{13}+2v'_{23}$.

Transformation von s_{13} und s_{12} ergibt:

[A10.43] $s'_{13} = 2+v'_{13}$

[A10.44] $s'_{12} = 2+v'_{12}$.

Im folgenden benötigen wir die beiden Ungleichungen

[A10.45] $-3 \geq v'_{12}+2v'_{23}$

und

[A10.46] $-3 \geq v'_{13}+2v'_{23}$.

Ungleichung [A10.45] ergibt sich durch Addition des Doppelten von Ungleichung [A10.41] zu [A10.44] und Division des Ergebnisses durch 3, Ungleichung [A10.46] durch Addition des Doppelten von [A10.42] zu [A10.41] und Division durch 3.

Fall 2.31:

Aus $s_1 < s_{13}$ folgt

[A10.47] $0 < 3+v'_{12}+2v'_{13}$,

aus $s_1 < s_{12}$ folgt

[A10.48] $0 < 3+2v'_{12}+v'_{13}$.

Die Werte für $\vec{n}'_4$ lauten:

[A10.49] $n'_{41} = 1/2(v'_{12}+v'_{13}+2)$

$n'_{42} = 1/2(-v'_{13}-1)$

$n'_{43} = 1/2(-v'_{12}-1)$.

Durch einsetzen erhalten wir

[A10.50] $e'_{13}(\vec{n}'_4) = e'_2(\vec{n}'_4)$

und

[A10.51] $e'_{12}(\vec{n}'_4) = e'_3(\vec{n}'_4)$.

Aus [A10.50] folgt dann nach Division durch 2 und Umordnung

$1/2(-v'_{12}-1) < v'_{13}+1$,

folglich

$n'_{43} < v'_{12}-v'_1$

und schliesslich

[A10.52] $e'_1(\vec{n}'_4) < e'_{13}(\vec{n}'_4)$

Genauso schliessen wir aus [A10.48]

[A10.53] $e'_1(\vec{n}'_4) < e'_{12}(\vec{n}'_4)$.

Aus [A10.45] ergibt sich nach kurzer Rechnung

[A10.54] $e'_{23}(\vec{n}'_4) \leq e'_2(\vec{n}'_4)$;

aus [A10.46] auf demselben Weg

[A10.55] $e'_{23}(\vec{n}'_4) \leq e'_3(\vec{n}'_4)$.

Zusammengefasst ergeben sich zwei Möglichkeiten:

entweder

[A10.56] $$e'_{13}(\vec{n}'_4) = e'_2(\vec{n}'_4) \geq e'_{12}(\vec{n}'_4 = e'_3(\vec{n}'_4) \geq \max\{(e'_1(\vec{n}'_4), e'_{23}(\vec{n}'_4)\}$$

oder

$$e'_{12}(\vec{n}'_4) = e'_3(\vec{n}'_4) > e'_{13}(\vec{n}'_4) = e'_2(\vec{n}'_4) \geq \max\{e'_1(\vec{n}'_4), e'_{13}(\vec{n}'_4)\}.$$

Die weitere Argumentation verläuft analog zu [A10.29] f.f. .

Die Rücktransformation ergibt nach kurzer Rechnung die in [16.26] angegebenen Werte für $\vec{n}_4$.

Fall 2.32: Unter den Voraussetzungen [16.27], also

[A10.58] $$v'_{12}+2v'_{13}+3 < 0$$

und

[A10.59] $$2v'_{12}+v'_{13}+3 \geq 0$$

bestimmt

[A10.60] $$n'_{31} = 1/4(v'_{12}+1)$$
$$n'_{32} = 1/4(v'_{12}+1)$$
$$n'_{33} = 1/2(v'_{12}+1)$$

laut Behauptung den Nucleolus des normierten Spiels. Wie in [A.10.24] und [A10.25] gezeigt, gilt

[A10.61] $$e'_1(\vec{n}'_3) = e'_2(\vec{n}'_3) \quad \text{und}$$

[A10.62] $$e'_{12}(\vec{n}'_3) = e'_3(\vec{n}'_3).$$

Wegen [A10.58] gilt

[A10.63] $$e'_{13}(\vec{n}'_3) < e'_1(\vec{n}'_3),$$

wegen [A10.46] entsprechend

[A10.64] $$e'_{23}(\vec{n}'_3) \leq e'_2(\vec{n}'_3)$$

Subtraktion der Ungleichung [A10.59] von [A10.58] führt auf

[A10.65] $$v'_{13} < v'_{12};$$

addieren wir das Doppelte von [A10.65] zu [A10.58], so erhalten wir

$$4v'_{13}-v'_{12}+3 < 0 \qquad \text{und daraus}$$

[A10.66] $$e'_{13}(\vec{n}'_3) < e'_3(\vec{n}'_3).$$

Subtraktion der Ungleichung [A10.42] von [A10.40] ergibt

[A10.67] $$v'_{12} > v'_{23};$$

addieren wir zu dem Doppelten von [A10.67] [A10.45], so folgt schliesslich

[A10.68] $$e'_{23}(\vec{n}'_3) < e'_3(\vec{n}'_3)$$

Wir fassen nun [A10.61] bis [A10.68] zusammen:

entweder $$e'_{12}(\vec{n}'_3) = e'_i(\vec{n}'_3) \geq e'_1(\vec{n}'_3) = e'_2(\vec{n}'_3) > \max\{e'_{13}(\vec{n}'_3), e'_{23}(\vec{n}'_3)\}$$

oder $$e'_1(\vec{n}'_3) = e'_2(\vec{n}_3) > e'_{12}(\vec{n}'_3) = e'_3(\vec{n}'_3) > \max\{e'_{13}(\vec{n}'_3), e'_{23}(\vec{n}'_3)\}.$$

Der weitere Beweis läuft wie in [A10.29] f.f. .

Fall 2.33:

Die transformierten Voraussetzungen lauten:

[A10.69] $$v'_{12}+2v'_{13}+3 \geq 0$$

und

[A10.70] $$2v'_{12}+v'_{13}+3 \leq 0.$$

Es gilt

[A10.71] $$n'_{51} = 1/4(v'_{13}+1)$$
$$n'_{52} = 1/2(v'_{13}+1)$$
$$n'_{53} = 1/4(v'_{13}+1)$$

und damit

[A10.72] $$e'_i(\vec{n}'_5) = e'_3(\vec{n}'_5)$$

und

[A10.73] $$e'_{13}(\vec{n}'_5) = e'_2(\vec{n}'_5).$$

Subtrahieren wir [A10.70] von [A10.69] , so erhalten wir

$$v'_{12} \leq v'_{13},$$

also

$$3v'_{13} \geq v'_{12}+2v'_{13} \geq -3 \qquad \text{wegen [A10.69]}$$

Hieraus folgt

$$v'_{13} \geq -1 \qquad \text{und damit}$$

[A10.74] $$e'_2(\vec{n}'_5) \geq e'_3(\vec{n}'_5).$$

Aus [A10.46] schliesst man

[A10.75] $$e'_{23}(\vec{n}'_5) \leq e'_3(n'_5)$$

aus [A10.70]

[A10.76] $$e'_{12}(\vec{n}'_5) \leq e'_1(\vec{n}'_5).$$

Zusammengefasst:

$$e'_{13}(\vec{n}'_5) = e'_2(\vec{n}'_5) \geq e'_1(\vec{n}'_5) = e'_3(\vec{n}'_5) \geq \max\{e'_{12}(\vec{n}'_5), e'_{23}(\vec{n}'_5)\}.$$

Der weitere Beweis läuft wie in [A10.29] f.f..

Fall 2.34:

Die Voraussetzungen gehen über in

[A10.77] $$v'_{12}+2v'_{13}+3 \leq 0$$

und

[A10.78] $$2v'_{12}+v'_{13}+3 \leq 0.$$

Addition von [A10.40] mit [A10.77] ergibt: $v'_{12} > v'_{23}$, also nach [A10.77].

$$3v'_{23} < 2v'_{23}+v'_{12} \leq -3, \quad \text{d.h.} \quad v'_{23} \leq -1.$$

Addition von [A10.77] mit [A10.78] führt auf

$$v'_{12}+v'_{13} \leq -2$$

Damit gilt entweder

$v'_{12} \leq -1,\ v'_{13} \leq -1,\ v'_{23} \leq -1$ (Fall 2.11)

oder $v'_{12} > -1,\ v'_{13} \leq -1,\ v'_{23} \leq -1$ (Fall 2.12)

oder $v'_{12} \leq -1,\ v'_{13} > -1,\ v'_{23} < -1$ (Fall 2.12 Indexpermutation).

Der weitere Beweis läuft wie in Fall 2.1.

Fall 2.4:

Transformation der Ungleichungen [16.31] bis [16.35] ergibt:

[A10.75] $-3 < 2v'_{12}+2v'_{13}-v'_{23}$,

[A10.80] $-3 < 2v'_{12}-v'_{13}+2v'_{23}$,

[A10.81] $-3 \leq -v'_{12}+2v'_{13}+2v'_{23}$

und $s'_{23} = 2+v'_{23}$

$s'_{13} = 2+v'_{13}$.

Fall 2.41: Wegen $s'_1 < s'_{13}$ und $s'_2 < s'_{23}$ gilt

[A10.82] $0 < 3+v'_{12}+2v'_{13}$

und

[A10.83] $0 < 3+v'_{12}+2v'_{23}$.

Transformation von $\vec{n}_6$ führt auf

[A10.84] $n'_{61} = 1/4(v'_{12}+1)-1/2(v'_{23}-v'_{13})$

$n'_{62} = 1/4(v'_{12}+1)+1/2(v'_{23}-v'_{13})$

$n'_{63} = -1/2(v'_{12}+1)$.

Damit gilt

[A10.85] $e'_{12}(\vec{n}'_6) = e'_3(\vec{n}'_6)$

und

[A10.86] $e'_{13}(\vec{n}'_6) = e'_{23}(\vec{n}'_6)$,

Aus [A10.81], [A10.82] und [A10.83] schliessen wir:

[A10.87] $e'_3(\vec{n}'_6) \geq e'_{13}(\vec{n}'_6)$

[A10.88] $e'_{13}(\vec{n}'_6) > e'_1(\vec{n}'_6)$

und

[A10.89] $e'_{23}(\vec{n}'_6) > e'_2(\vec{n}'_6)$.

Zusammengefasst:

$$e'_{12}(\vec{n}'_6) = e'_3(\vec{n}'_6) \geq e'_{13}(\vec{n}'_6) = e'_{23}(\vec{n}'_6) \geq \max\,(e'_1(\vec{n}'_6),\ e'_2(\vec{n}'_6)).$$

Der weitere Beweis läuft analog zu [A10.29] f.f. .

Fall 2.42: Hier gilt:

[A10.90] $0 < 3+v'_{12}+2v'_{13}$

und

[A10.91] $0 > 3+v'_{12}+2v'_{23}$.

$\vec{n}'_4$ hat die Komponenten

[A10.92] $n'_{41} = 1/2(v'_{12}+v'_{13}+2)$

$n'_{42} = -1/2(v'_{13}+1)$

$n'_{43} = -1/2(v'_{12}+1)$.

Einsetzen ergibt

[A10.93] $e'_{13}(\vec{n}'_4) = e'_2(\vec{n}'_4)$

[A10.94] $e'_{12}(n'_4) = e'_3(\vec{n}'_4)$.

Weiterhin gilt

[A10.95] $e'_1(\vec{n}'_4) < e'_{13}(\vec{n}'_4)$ wegen [A10.90]

[A10.96] $e'_1(\vec{n}'_4) < e'_{12}(\vec{n}'_4)$ wegen [A10.80], [A10.81] und [A

[A10.97] $e'_{23}(\vec{n}'_4) < e'_2(\vec{n}'_4)$ wegen [A10.91]

[A10.98] $e'_{23}(\vec{n}'_4) < e'_3(\vec{n}'_4)$ wegen [A10.80], [A10.81] und [A

Fassen wir [A10.92] bis [A10.98] zusammen, so erhalten wir

$$e'_{13}(\vec{n}'_4) = e'_2(\vec{n}'_4) \geq e'_{12}(\vec{n}'_4) = e'_3(\vec{n}'_4) \geq \max\,(e'_{23}(\vec{n}'_4), e'_1(\vec{n}'_4))$$

oder

$$e'_{12}(\vec{n}'_4) = e'_3(\vec{n}'_4) > e'_{13}(\vec{n}'_4) = e'_2(\vec{n}'_4) \geq \max\,(e'_{23}(\vec{n}'_4), e'_1(\vec{n}'_4)).$$

Der Beweis wird fortgeführt wie in [A10.29] f.f..

Der Beweis von Fall 2.43 erübrigt sich.

Fall 2.44: Als Voraussetzungen im normierten System ergeben sich:

[A10.99] $0 \geq 3v'_{12}+2v'_{13}$

und

[A10.100] $0 \geq 3+v'_{12}+2v'_{23}$.

Die Komponenten von $\vec{n}'_3$ lauten

[A10.101] $n'_{31} = 1/4(v'_{12}+1)$

$n'_{32} = 1/4(v'_{12}+1)$

$n'_{33} = 1/2(v'_{12}+1)$.

Einsetzen führt zu

[A10.102] $e'_1(\vec{n}'_3) = e'_2(\vec{n}'_3)$

und

[A10.103] $e'_{12}(\vec{n}'_3) = e'_3(\vec{n}'_3)$.

Addieren wir [A10.79] und [A10.80], so erhalten wir

[A10.104] $-6 < 4v'_{12}+v'_{13}+v'_{23}$

und durch Subtraktion der Ungleichungen [A10.79] und [A10.80] von [A10.81]:

$$v'_{12} > v'_{23} \quad \text{und} \quad v'_{12} > v'_{13}.$$

Setzen wir diese Ergebnisse in [A10.104] ein, so führt dies zu

$$v'_{12} > -1,$$

also

[A10.105] $$e'_3(\vec{n}'_3) > e'_2(\vec{n}'_3).$$

Aus [A10.90] und [A10.99] folgt schliesslich

[A10.106] $$e'_{23}(\vec{n}'_3) \leq e'_2(\vec{n}'_3)$$

und

[A10.107] $$e'_{13}(\vec{n}'_3) \leq e'_1(\vec{n}'_3).$$

[A10.102] bis [A10.107] ergeben

$$e'_{12}(\vec{n}'_3) = e'_3(\vec{n}'_3) > e'_1(\vec{n}'_3) = e'_2(\vec{n}'_3) \geq \max\,(e'_{13}(\vec{n}'_3), e'_{23}(\vec{n}'_3)).$$

Der weitere Beweis folgt [A10.29] f.f..

Beweis von Theorem 11

a) Wir nummerieren die Spieler so um, dass

[A11.1] $$v_{12} \geq v_{13} \geq v_{23}$$

gilt.

1.) Falls

[A11.2] $$v_1 \leq \frac{v_{12}}{2} \quad \text{und} \quad v_2 \leq \frac{v_{12}}{2}$$

ist, betrachte $\vec{x} = (\frac{v_{12}}{2}, \frac{v_{12}}{2}, v_{123}-v_{12})$. Wegen [A11.2] und der Superadditivität von v ist $x_i \geq v_i$ gewährleistet und wegen $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$ ist [18.1] erfüllt. Die drei Bedingungen [18.2] gelten wegen [A11.1].

2.) Falls $v_1 > \frac{v_{12}}{2}$ und $v_2 < \frac{v_{12}}{2}$ ist, betrachte $\vec{x} = (v_1, v_2, v_{123}-v_1-v_2$

Es ist klar, dass x um Gleichaufteilungskern liegt, wenn nicht

$$v_2 < \frac{v_{23}}{2} \quad \text{und} \quad v_{123}-v_1-v_2 < \frac{v_{23}}{2} \quad !$$

gilt. Doch die Addition dieser beiden Ungleichungen führt auf $v_{123}-v_1 < v_{23}$ und erweist die gleichzeitige Gültigkeit der beiden Ungleichungen als unmöglich.

3.) Falls $v_1 < \frac{v_{12}}{2}$ und $v_2 > \frac{v_{12}}{2}$ ist, argumentieren wir wie im Fall 2.

4.) Für den Fall $v_1 > \frac{v_{12}}{2}$ und $v_2 > \frac{v_{12}}{2}$ schliesslich ist die Behauptung trivial.

b) Aus $\vec{x} \in C(v)$ folgt $x_i > v_i$, $x_1+x_2+x_3 = v_{123}$ und $x_i+x_j \geq v_{ij}$. Wegen letzterer Ungleichung gilt $x_i \geq \frac{v_{ij}}{2}$ oder $x_j \geq \frac{v_{ij}}{2}$, womit Behauptung b bewiesen ist.

c) Es lassen sich leicht Beispiele von nicht invariantem GK(v) angeben. Sei etwa:

$v_1 = v_2 = v_3 = v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0$, $v_{123} = 1$ und

$v'_1 = v'_{12} = v'_{13} = -a$, $v'_2 = v'_3 = v'_{23} = 0$, $v'_{123} = 1-a$ mit einem $a > 0$.

Wie leicht man sieht, sind v und v' äquivalente Spiele. Die Auszahlung $\vec{x} = (1/3,0,0)$ liegt im Gleichverteilungskern von v, ihre Transformierte $\vec{x} = (1/3-a,0,0)$ aber nicht in GK(v').

Anhang A2

Einige Ergebnisse der Theorie der n-Personen-Spiele mit Seitenzahlungen ($n \geq 3$)

1.) Die angegebenen Definitionen von Imputation, Kern, Bargaining Set, Nucleolus, Gleichaufteilung des Restes und Gleichverteilungskern lassen sich problemlos auf den Fall $n > 3$ übertragen.

2.) Theorem 2 gilt auch für $n > 3$; der Beweis läuft genau wie für $n = 3$.

3.) Theorem 3 ist ein Spezialfall eines Theorems für n-Personen-Spiele (SHAPLEY 1965):

Seit 1_{S_i} ein Vektor mit m Komponenten, dessen j-te Komponente gleich 1 ist, falls $j \in S_i$, sonst gleich 0.

Ein n-Personen-Spiel heisst balanciert, wenn für beliebige Koalitionen $S_1 \ldots S_m \subseteq N$ (N= Spielermenge) und beliebige $\lambda_1 \ldots \lambda_m \geq 0$

mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot 1_{S_i} \leq 1_N$

gilt: $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v(S_i) \leq v(N)$.

Theorem: Ein durch v gegebenes n-Personen-Spiel hat genau dann einen nichtleeren Kern, wenn es balanciert ist.

Hinreichende und notwendige Bedingungen für $n = 4$ führt ROSENMÜLLER (1971) an.

4.) Zu Theorem 4 ist uns kein Analogon für $n > 3$ bekannt.

5.) Ein Konfliktmass ist für $n > 3$ noch nicht definiert worden.

6.) Für das Bargaining Set Modell gilt:
Der Bargaining Set ist nicht leer für alle n und für jede Koalition.
Beweis: PELEG 1967.

Weiterhin gilt für die grosse Koalition stets:

Der Kern ist Teilmenge des Bargaining Set für diese Koalition.
Beweis: AUMANN und MASCHLER 1964.
An der hier angeführten Stelle findet man auch einige Ergebnisse der Bargaining Set Theorie für 4-Personen-Spiele.

7.) Der Nucleolus eines n-Personen-Spiels besteht aus genau einer Auszahlung für jede Koalition, die im Bargaining Set für die gleiche Koalition liegt.
Beweis: SCHMEIDLER 1969.

8.) Der Gleichaufteilungskern ist auch im Fall $n > 3$ nicht leer.
Beweis: SELTEN (1972)

Lebenslauf

Am 17. Juli 1948 wurde ich als Sohn des Regierungsveterinärrates Dr. Fritz Lichtenberger und seiner Ehefrau Grete, geb. Plamböck, in Ottweiler/Saar geboren. In Merzig/Saar besuchte ich von 1954 bis 1958 die evangelische Volksschule und anschliessend das dortige Realgymnasium. An dieser Schule legte ich 1966 das Abitur ab.

Im Wintersemester 1966/67 begann ich das Studium der Physik an der Universität des Saarlandes. Im Herbst 1971 beendete ich dieses Studium mit dem Diplom in Physik. Anschliessend war ich ein halbes Jahr lang 'Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle' im Institut für Theoretische Physik der Universität des Saarlandes. Im Frühjahr 1972 begann ich mit der vorliegenden Dissertation und wendete mich dem Studium der Psychologie zu. Seit Herbst 1974 bin ich wissenschaftlicher Angestellter im Rahmen eines von Prof. Dr. Tack geleiteten Forschungsprojekts über spieltheoretische Konfliktmodelle.